

Агишева Д. К., Зотова С. А., Светличная В. Б., Матвеева Т. А.

Методы принятия оптимальных решений

Часть 1

Волгоград

2011 г.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Д. К. Агишева, С. А. Зотова

В. Б. Светличная, Т. А. Матвеева

МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Часть 1

Учебное пособие



Волгоград

2011 г

УДК. 519.6 (075.8)

ББК 22.19

Рецензенты:

Канд. пед. наук, доцент кафедры «Высшая математика» филиала государственного образовательного учреждения «Московский энергетический институт (технический университет)» в г. Волжском *Устинова Л. Г.*

Канд. тех. наук, заведующий кафедрой «Автомобильный транспорт» Волжского политехнического института (филиал) Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Волгоградский государственный технический университет», доцент *Моисеев Ю.И.*

Печатается по решению редакционно-издательского совета

Волгоградского государственного технического университета

Агишева Д. К., Зотова С. А., Светличная В. Б., Матвеева Т. А. **Методы принятия оптимальных решений. Часть 1:** учебное пособие / Д. К. Агишева, С. А. Зотова, В. Б. Светличная, Т. А. Матвеева / ВПИ (филиал) ВолгГТУ. – Волгоград: ИУНЛ ВолгГТУ, 2011. – 155 с.

ISBN 978-5-9948-0642-5

В пособии отражён многолетний опыт чтения лекций и проведения практических занятий по методам принятия оптимальных решений.

В работе рассмотрены различные методы решения задачи линейного программирования: графический, являющийся основой и алгебраического симплекс-метода. Отдельные главы посвящены нелинейному и динамическому программированию. Подробно изложены основные теоретические сведения, приведены решения типовых задач.

В рукописи содержится много графического материала. Приведены таблицы, в которых систематизированы основные свойства и алгоритмы для практического применения.

Учебное пособие рассчитано на студентов всех форм обучения направлений 552100 «Эксплуатация транспортных средств», 080100.62 «Экономика», 080200.62 «Менеджмент».

ISBN 978-5-9948-0642-5

© Волгоградский государственный
технический университет, 2011

© Волжский политехнический ин-
ститут, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ВВЕДЕНИЕ	6
Глава 1. ЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ	12
1.1. Линейные функции	12
1.2. Элементы геометрии выпуклых множеств	13
1.3. Выпуклая линейная комбинация точек	16
1.4. Экономико-математическая модель задачи ЛП	19
1.5. Классификация задач ЛП	22
1.6. Формы записи основной задачи ЛП	24
1.7. Графический метод решения задач ЛП	24
1.7.1. Графический метод решения стандартной задачи ЛП с одной переменной	25
1.7.2. Графический метод решения стандартной задачи ЛП с двумя переменными	25
1.7.3. Графический метод решения стандартной задачи ЛП с тремя переменными	34
1.7.4. Графический метод решения основной задачи	35
1.7.5. Графический анализ устойчивости	40
1.8. Переход от графического решения задачи ЛП к алгебраическому методу	54
1.9. Теоретические основы алгебраического метода решения задач ЛП	55
1.10. Симплекс-метод для решения задач ЛП	63
1.11. Итерационная природа симплекс-метода и его геометрическая интерпретация	64
1.12. Критерий оптимальности допустимого плана в симплекс-методе	66
1.13. Наличие отрицательного b_i при преобразовании системы ограничений в канонический вид	67
1.14. Алгоритм симплекс-метода для канонической задачи ЛП ..	70
1.15.1. Единственность оптимального решения	73
1.15.2. Бесконечное множество решений (альтернативный оптимум)	77
1.15.3. Отсутствие конечного оптимума	80
1.15.4. Вырожденность оптимального решения	82
1.15.5. Отсутствие допустимых решений	86
1.16. Метод искусственного базиса	87
1.17. Задачи целочисленного ЛП	93
1.17.1. Графический метод решения	94
1.17.2. Метод Гóмори	99
1.18. Построение экономико-математических моделей	101

Глава 2. ДВОЙСТВЕННОСТЬ ЗАДАЧ ЛП	106
2.1. Определение двойственной задачи	106
2.2. Математические модели двойственных задач	106
2.3. Основные теоремы двойственности	108
2.4. Оптимальное решение двойственной задачи	111
2.5. Решение двойственных задач	112
2.6. Экономический анализ задач ЛП с использованием теории двойственности	120
2.7. Устойчивость двойственных оценок	122
2.8. Экономическая интерпретация двойственных оценок	125
Глава 3. ОБЩАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	127
3.1. Дробно-линейное программирование (ДЛП)	128
3.1.1. Графический способ решения	128
3.1.2. Экономическая интерпретация задач ДЛП	129
3.1.3. Решение задач ДЛП симплекс-методом	131
3.2. Графический метод решения задач нелинейного програм- мирования на плоскости	133
3.3. Метод множителей Лагранжа решения задач НП	137
3.4. Выпуклое программирование	141
3.5. Квадратическое программирование	142
Глава 4. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ	143
4.1. Основные понятия ДП	144
4.2. Алгоритм составления математической модели задачи ДП ..	144
4.3. Алгоритм решения задачи ДП	145
4.4. Применение метода функциональных уравнений в опреде- лении оптимальных сроков замены оборудования	146
4.5. Оптимальное распределение ресурсов (инвестиций)	150
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	154

Предисловие

Учебное пособие «Методы принятия оптимальных решений», часть 1 охватывает разделы математического программирования, встречающиеся при решении практических вопросов.

В основе работы лежит многолетний опыт чтения лекций и проведения практических занятий в Волжском политехническом институте.

В первой главе основное внимание уделено симплексному методу и его реализации при решении задач линейного программирования. Рассмотрены случаи сведения симплексного метода к наглядному геометрическому способу.

Вторая глава затрагивает вопросы теории двойственности и анализа устойчивости.

Третья и четвертая главы посвящены нелинейному и динамическому программированию.

Для изучения изложенного материала необходимы первоначальные сведения из линейной алгебры, дифференциального исчисления функций одной и нескольких переменных.

Цель предлагаемого пособия – познакомить будущих инженеров с основными методологическими подходами, моделями и методами принятия оптимальных решений, помочь приобрести практические навыки.

Написанное без излишнего академизма (но достаточно строго), пособие будет полезно широкому кругу читателей: студентам, магистрам, аспирантам и преподавателям высших учебных заведений, инженерам, экономистам, разработчикам программного обеспечения.

В работе используются обозначения:

► ■ – начало и конец доказательства;

☺ ☺ – начало и конец решения примера или задачи.

Введение

С давних времён человечество, используя метод проб и ошибок, интуицию и опыт, накапливаемый в каждой конкретной ситуации, создавало искусство выработки наилучших решений в самых разных областях своей деятельности.

Принятие решения в конкретной задаче – проблема многосложная, сопряжённая с неохватным многообразием существующих альтернатив и ограниченными возможностями взявшегося за его поиск.

Успехи применения математических методов в естественных науках привели к мысли о том, чтобы включить в сферу математического влияния и проблему принятия решений и попытаться тем самым превратить древнее искусство в современную науку.

Уровень развития науки и техники, достигнутый к настоящему времени, позволяет задумывать и осуществлять мероприятия, в которые оказываются вовлечёнными значительные ресурсы – и материальные, и людские; мероприятия, масштабы, стоимость и последствия которых существенно превышают всё, что проводилось когда-либо ранее.

Деятельность отдельных людей и коллективов, как правило, связана с выбором решений, которые позволили бы получить некие оптимальные результаты – затратить минимум средств на питание семьи, достичь максимальной прибыли предприятия, добиться наилучших показателей в спорте и т.п. Но в каждой конкретной ситуации надо считаться с реальными условиями задачи.

Для того чтобы что-то рассчитать, необходимо формализовать задачу, т.е. составить математическую модель, поскольку по своей природе математические методы можно применять не непосредственно к изучаемой действительности, а лишь к математическим моделям тех или иных явлений. *Математические модели* – это модели, использующие для описания свойств и характеристик объекта или события математические символы и методы. *Экономико-математическая модель* – математическое описание исследуемого экономического процесса или объекта. Если некоторую проблему удастся перенести на язык формул, то она сильно упрощается. Математический подход прост ещё и потому, что он подчиняется вполне определённым жёстким правилам, которые нельзя отменить. По существу, любая формула (или совокупность формул) представляет собой определённый этап в построении математической модели. Опыт показывает, что построить модель (написать уравнение) довольно легко. Трудно в этой модельной и, следовательно, упрощённой форме суметь передать суть изучаемого явления.

Перечислим основные этапы принятия решения.

1-й шаг – формализация проблемы.

Прежде чем приступать к построению математических моделей, команда экспертов должна рассмотреть возможность разрешения проблемы путём применения какого-либо “человеческого”, а не технического решения. В связи с этим команды экспертов обычно в качестве первого этапа исследования реальной проблемы проводят экспертизу ситуации путём привлечения специалистов, не связанных с математикой.

В случае если проблема сформулирована корректно, появляется возможность выбора готовой модели, разработка которой поможет в разрешении рассматриваемой проблемы, либо, если готовой модели нет, возникает необходимость создания такой модели, которая в достаточной степени точно отражала бы существенные стороны данной проблемы. В результате должны быть получены три принципиальных элемента решаемой задачи:

- 1) описание возможных альтернативных решений,
- 2) определение целевой функции,
- 3) построение системы ограничений, налагаемых на возможные решения.

2-й шаг – построение математической модели.

Построение математической модели означает перевод формализованной задачи, описание которой получено на предыдущем этапе, на чёткий язык математических отношений. Если получена одна из стандартных математических моделей, например, модель линейного программирования, то решение обычно достигается путём использования существующих алгоритмов. Если же результирующая модель очень сложная и не приводится к какому-либо стандартному типу моделей, то команда может либо упростить её, либо применить эвристический подход, либо использовать имитационное моделирование. В некоторых случаях комбинация этих моделей может привести к решению исходной задачи.

3-й шаг – решение модели.

Решение модели реализуется на основе известных алгоритмов оптимизации. Важным аспектом этого этапа является *анализ устойчивости* полученного решения. Это подразумевает получение дополнительной информации о поведении “оптимального” решения при изменении некоторых параметров модели. Анализ устойчивости особенно необходим, когда невозможно точно оценить параметры модели. В этом случае важно изучить поведение оптимального решения в окрестности первоначальных оценок параметров модели.

4-й шаг – проверка адекватности модели.

Этот этап предполагает проверку правильности модели, т. е. определения того, соответствует ли поведение модели в конкретных ситуациях поведению исходной реальной системы. Формальным методом проверки адекватности модели является сравнение полученного решения (поведение модели) с известными ранее решениями или поведением реальной систе-

мы. Модель считается адекватной, если при определённых начальных условиях её поведение совпадает с поведением исходной системы при тех же начальных условиях.

5-й шаг – реализация решения.

Реализация решения подразумевает перевод результатов решения модели в рекомендации, представленные в форме, понятной для лиц, принимающих решения, т. е. заказчиков.

Замечание. Из всех пяти приведённых этапов только третий, *решение модели*, достаточно точно определён и наиболее прост для реализации, поскольку действия на этом этапе основываются на точной математической теории.

Существует много разнообразных математических моделей, которые достаточно хорошо описывают различные ситуации, требующие принятия тех или иных управленческих решений. Выделим из них три класса – детерминированные, стохастические и игровые (рис.1.1).

Стохастические модели применяются в тех случаях, когда некоторые факторы носят неопределённый, случайный характер. Эти неизвестные факторы – случайные величины, для которых известны функции распределения и различные статистические характеристики (математическое ожидание, дисперсия, ...).

В моделях стохастического программирования либо в целевую функцию, либо в ограничения входят случайные величины. *Модели теории случайных процессов* предназначены для изучения процессов, состояние которых в каждый момент времени является случайной величиной. *Модели теории массового обслуживания* предназначены для изучения систем, занятых обслуживанием требований. К стохастическим моделям можно отнести модели теории полезности, поиска и принятия решений.

Для моделирования ситуаций, зависящих от факторов, для которых невозможно собрать статистические данные, и значения которых не определены, используются *модели с элементами неопределённости*. В *теоретико-игровых моделях* участвуют несколько игроков – противников либо союзников с собственными интересами по организации некоторого предприятия. В *имитационных моделях* реальный процесс разворачивается в машинном времени, и прослеживаются результаты случайных воздействий на него.

При разработке *детерминированных моделей* исходят из того, что основные факторы, характеризующие ситуацию, вполне определены и известны. Здесь обычно ставится задача оптимизации некоторой величины.



Рис.1.1.

Приведём в пример одну из старинных русских задач. Сколько надо взять бабе для продажи на рынке живых гусей, уток и кур, чтобы получить наибольшую выручку, если баба может доставить на рынок птицы массой не более m кг?

Или другой пример – задача о питании (или о смесях). Какое количество и каких продуктов необходимо купить хозяйке, чтобы затратить на покупку минимум денег и одновременно обеспечить для организма необходимое количество белков, жиров, углеводов и т.п.? Стоимость продуктов и количество белков, жиров, углеводов и других компонентов в каждом продукте заранее известны.

Пусть, например, отдел маркетинга на основе анализа рынка предлагает предприятию выпустить выгодные для реализации новые виды продуктов. Каждый из новых продуктов будет вносить в доход предприятия свой вклад, а его изготовление потребует своей доли в расходе имеющихся в наличии ресурсов. Следует учесть, что для одновременного производства всех новых продуктов наличных ресурсов, как правило, оказывается недостаточно. Возникает естественный вопрос: какие из этих новых видов продуктов, и в каком количестве следует производить?

И ещё один пример – так называемая транспортная задача. Пусть необходимо доставить однородный груз от m поставщиков к n потребителям. Стоимость перевозки единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю известна. Требуется так организовать перевозку груза, чтобы весь товар от поставщиков был доставлен потребителям, и чтобы стоимость затрат была минимальной.

Во всех рассмотренных задачах можно выделить достигаемую при решении цель (сформулировать целевую функцию, или оптимизируемый критерий):

- максимум выручки за проданную птицу, минимум затрат на питание, максимум прибыли предприятия, минимум затрат на перевозку груза; а также условия, ограничивающие значения неизвестных:
- массу птицы P , которую может доставить на рынок баба; необходимое для организма количество белков, жиров и углеводов; количество ресурсов и материалов, которыми располагает предприятие; условие того, что весь груз будет вывезен от поставщика и все потребители получат необходимое количество груза.

Для *статических моделей* сформулированные в реальных задачах требования должны быть выражены количественными критериями и записаны в виде математических выражений. Т.е. модель выглядит следующим образом:

- необходимо найти такой набор неизвестных (x_1, x_2, \dots, x_n) , чтобы оптимизировать функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при ограничениях вида

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, & i = \overline{1, m}; \\ h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, & j = \overline{1, k}. \end{cases}$$

По виду оптимизируемой функции и функций, входящих в условия-ограничения статические модели, делятся на *виды*:

- задачи линейного программирования – функции f , g_i и h_j линейны;
- задачи нелинейного программирования – хотя бы одна из функций f , g_i и h_j нелинейная;
- задачи квадратичного программирования – целевая функция f является квадратичной, функции g_i и h_j линейны;
- задачи выпуклого программирования – функция f является выпуклой, функции g_i – вогнутые, т.е. рассматриваются **выпуклые функции на выпуклых множествах**.
- задачи сепарабельного программирования – целевая функция f представляет собой сумму функций, различных для каждой переменной, функции g_i и h_j могут быть как линейными, так и нелинейными (но все недиагональные элементы матрицы, состоящей из вторых частных производных любой функции задачи, равны нулю);
- задачи целочисленного программирования – значения неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n могут являться только целыми числами;

В динамических моделях учитывается фактор времени. Расчет динамических моделей сложен, и для каждой конкретной задачи необходимо разрабатывать специальный алгоритм решения.

Графические модели используются тогда, когда задачу удобно представить в виде графической структуры.

Глава 1. Линейные математические модели

Необходимо отметить, что в реальной экономике подавляющее большинство зависимостей носит нелинейный характер, поэтому рассматривая линейные задачи, мы упрощаем действительность. В некоторых случаях это достаточно реалистично, в других – получаемые результаты оказываются весьма далёкими от совершенства. Поэтому наряду с задачами линейного программирования решаются задачи нелинейного и динамического программирования. Но линейные модели привлекают огромное внимание. Они сравнительно просты, хорошо разработаны, допускают полное исследование и достаточно эффективны в ряде стандартных ситуаций. Многие задачи планирования и управления могут быть сформулированы как задачи линейного программирования. По оценкам специалистов, примерно 80-85% всех решаемых задач оптимизации относятся именно к задачам линейного программирования.

Укажем несколько общих ситуаций, в которых линейное программирование применяется часто и эффективно:

- *задачи о составлении смеси*, цель которых заключается в выборе наиболее экономичной смеси ингредиентов (руды, нефти, пищевых продуктов и др.) при учёте ограничений на физический или химический состав смеси и на наличие необходимых материалов;
- *задачи производства*, целью которых является подбор наиболее выгодной производственной программы выпуска одного или нескольких видов продукции при использовании ограниченных источников сырья;
- *задачи распределения*, цель которых состоит в том, чтобы организовать доставку материалов от некоторого числа источников к некоторому числу потребителей так, чтобы оказались минимальными либо расходы по этой доставке, либо время, затрачиваемое на неё, либо некоторая комбинация того и другого. В простейшем виде это задача о перевозках (*транспортная задача*).

Рассматриваются и комбинированные задачи (например, в случае, когда какой-то товар производится в разных местах, задачи производства и распределения объединяются в единую модель).

1.1. Линейные функции

Определение. Функция вида

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n,$$

где c_1, c_2, \dots, c_n – постоянные величины, называется *линейной функцией* относительно переменных x_1, x_2, \dots, x_n .

Заметим, что в линейное выражение все переменные входят в первой степени и никакие переменные не перемножаются.

Свойства линейной функции

1. Для любых наборов переменных

$$X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \text{ и } X'' = (x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$$

справедливо равенство:

$$L(X' + X'') = L(X') + L(X'').$$

- Для нового набора переменных:

$$X = X' + X'' = (x'_1 + x''_1, x'_2 + x''_2, \dots, x'_n + x''_n)$$

преобразуем линейную функцию:

$$\begin{aligned} L(X) &= L(X' + X'') = c_1(x'_1 + x''_1) + c_2(x'_2 + x''_2) + \dots + c_n(x'_n + x''_n) = \\ &= (c_1x'_1 + c_2x'_2 + \dots + c_nx'_n) + (c_1x''_1 + c_2x''_2 + \dots + c_nx''_n) = L(X') + L(X''). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2. Для любого набора переменных $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и произвольного числа λ справедливо равенство:

$$L(\lambda X) = \lambda L(X).$$

- Для нового набора переменных:

$$\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

преобразуем линейную функцию:

$$\begin{aligned} L(\lambda X) &= c_1(\lambda x_1) + c_2(\lambda x_2) + \dots + c_n(\lambda x_n) = \\ &= \lambda(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n) = \lambda L(X). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.2. Элементы геометрии выпуклых множеств

Определение. Множества, элементами которых являются точки, называются *точечными*.

Примерами точечных множеств на плоскости являются – круг, прямая, луч, отрезок, угол, сектор, треугольник и т. д.; в пространстве – шар, призма, параллелепипед и т. п.

Точечные множества (далее просто множества) делятся на выпуклые и невыпуклые.

Определение. Множество точек называется *выпуклым*, если оно вместе с любыми двумя точками содержит и отрезок, их соединяющий. На рис. 1.2 изображено выпуклое множество (выпуклый многоугольник).

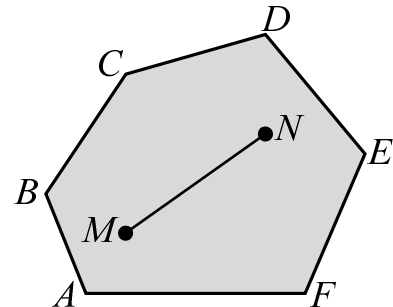


Рис. 1.2.

Определение. Если существует хотя бы одна такая пара точек множества, что отрезок, соединяющий эти точки, не принадлежит целиком этому *множеству*, то оно называется *невыпуклым* (рис. 1.3).

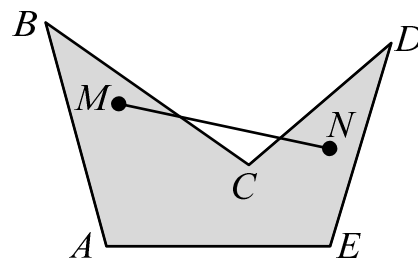


Рис. 1.3.

Теорема 1.1. *Пересечение (общая часть) двух выпуклых множеств также является выпуклым множеством.*

► Пусть множества S_1 и S_2 выпуклые. Составим область $S = S_1 \cap S_2$.

Если их пересечение является пустым множеством или состоит только из одной точки, то справедливость теоремы очевидна, поскольку пустое множество и множество, состоящее из одной точки, – выпуклые.

Поэтому полагаем, что пересечению принадлежат, по крайней мере, две произвольные точки M и N (рис. 1.4). Следовательно, они принадлежат как множеству S_1 , так и множеству S_2 .

По условию теоремы множества S_1 и S_2 – выпуклые, значит вместе с точками M и N каждому из них принадлежат и все точки отрезка MN .

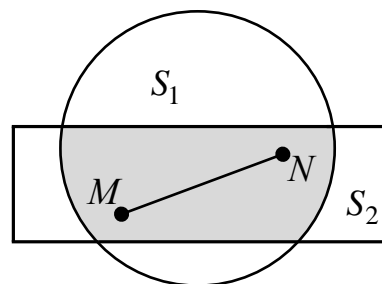


Рис. 1.4.

Таким образом, пересечение множеств S_1 и S_2 вместе с его произвольными точками M и N содержит и все точки отрезка MN .

Следовательно, по определению оно является выпуклым множеством. ■

Пользуясь методом математической индукции, можно доказать, что пересечение конечного числа выпуклых множеств есть также выпуклое множество.

Среди точек выпуклого множества можно выделить внутренние, граничные и угловые точки.

Определение. Точка множества называется *внутренней* (рис. 1.5, точка N), если в некоторой её окрестности содержатся точки только данного множества.

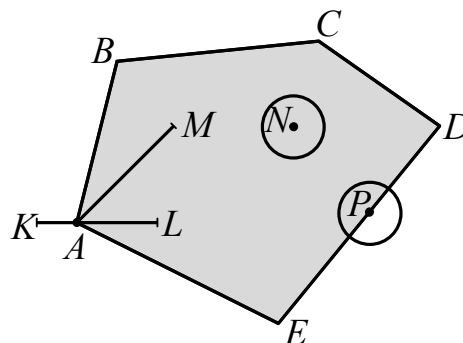


Рис. 1.5.

Определение. Точка области называется *граничной* (рис. 1.5, точка P), если в любой её окрестности содержатся как точки, принадлежащие данному множеству, так и точки, не принадлежащие ему.

Определение. Точка выпуклого множества называется *угловой* (или *крайней*), если через неё нельзя провести ни одного отрезка, состоящего только из точек данного множества, и для которого она была бы внутренней (рис. 1.5, точки A, B, C, D, E).

Точка A – угловая, так как для любого отрезка, принадлежащему многоугольнику (например, отрезку AM), она не является внутренней (точка A – внутренняя для отрезка KL , но этот отрезок целиком не принадлежит многоугольнику).

Понятие угловой точки вводится только для выпуклых множеств, для невыпуклых множеств это определение теряет смысл.

Для выпуклого множества угловые точки всегда совпадают с вершинами многоугольника (многогранника), для невыпуклого множества это не обязательно. Для полукруга все точки полуокружности – угловые. Вообще, любой граничный участок выпуклого множества, не являющийся прямой или её частью, состоит только из угловых точек, т. е. их существует бесконечное множество. Конечное число угловых точек на плоскости могут иметь лишь выпуклые множества, границами которых служат прямые или отрезки прямой.

Определение. Выпуклые многоугольники можно определить как выпуклые множества точек плоскости с конечным числом угловых точек. В пространстве выпуклое множество с конечным числом угловых точек называется *выпуклым многогранником*.

В соответствии с этими определениями выпуклыми многоугольниками являются не только треугольник, ромб, трапеция и т. д., но и точка, луч, угол (имеют по одной угловой точке), отрезок (две угловые точки), прямая, вся плоскость, полуплоскость, часть плоскости, заключённая между двумя параллельными прямыми, включая эти прямые (не имеют угловых точек) и др. В трёхмерном пространстве выпуклыми многогранниками являются пирамида, призма, параллелепипед и т. п.

Определение. Если множество содержит все свои граничные точки, то оно называется *замкнутым*; в противном случае – *открытым*.

Определение. Множество называется *ограниченным*, если существует шар (окружность) радиуса конечной длины с центром в любой точке множества, который полностью содержит в себе данное множество; в противном случае множество называется *неограниченным*.

1.3. Выпуклая линейная комбинация точек

1. Пусть на плоскости OXY даны точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ (рис. 1.6).

$A(x; y)$ – текущая (произвольная) точка отрезка $[A_1A_2]$.

Так как векторы $\overrightarrow{A_1A}$ и $\overrightarrow{A_1A_2}$ сонаправлены (коллинеарны), то:

$$\overrightarrow{A_1A} = t \cdot \overrightarrow{A_1A_2} \text{ при } t \in (0;1).$$

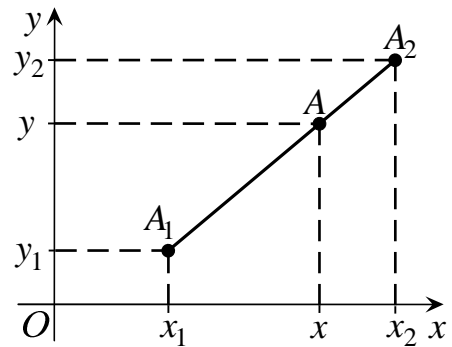


Рис. 1.6.

Запишем это условие в координатной форме:
$$\begin{cases} x - x_1 = t \cdot (x_2 - x_1), \\ y - y_1 = t \cdot (y_2 - y_1). \end{cases}$$

или
$$\begin{cases} x = (1-t) \cdot x_1 + t \cdot x_2, \\ y = (1-t) \cdot y_1 + t \cdot y_2. \end{cases}$$

Введём обозначения: $\lambda_1 = 1 - t$, $\lambda_2 = t$.

Тогда система примет вид:
$$\begin{cases} x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2, \\ y = \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2, \end{cases}$$

где
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_i > 0, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Запишем в более общем виде:

$$\begin{cases} A = \lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_i > 0, \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (1.1)$$

Определение. Точка A , для которой выполняются условия (1.1), называется *выпуклой линейной комбинацией точек* A_1 и A_2 . С геометрической точки зрения это означает, что выпуклая линейная комбинация A точек A_1 , A_2 принадлежит отрезку $[A_1A_2]$.

При $t = 0$ получим: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0 \Rightarrow$ точка A совпадает с точкой A_1 .

При $t = 1$ получим: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1 \Rightarrow$ точка A совпадает с точкой A_2 .

Точки A_1 и A_2 являются угловыми точками отрезка $[A_1A_2]$.

Замечание. Из определения выпуклой линейной комбинации точек, очевидно, что угловая точка не может быть представлена как выпуклая линейная комбинация двух других точек отрезка.

2. Пусть на плоскости заданы точки A_1, A_2 и A_3 . Точка $A(x; y)$ – текущая точка треугольника $A_1A_2A_3$. Рассмотрим два случая.

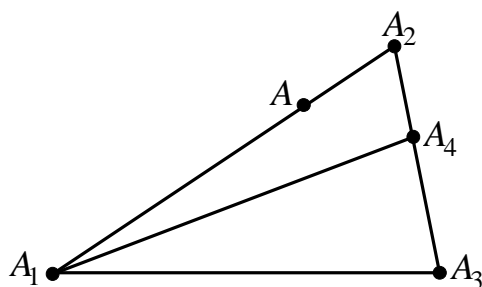


Рис. 1.7.

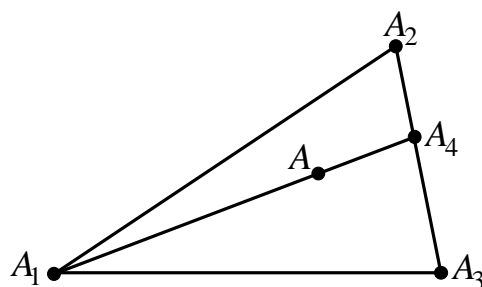


Рис. 1.8.

а) Точка A лежит на стороне $\Delta A_1A_2A_3$, например, на стороне $[A_1A_2]$, (рис. 1.7). Тогда точку A можно представить в виде линейной комбинации точек A_1, A_2 и A_3 следующим образом:

$$A = \lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 + \lambda_3 \cdot A_3, \quad \text{где} \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \\ \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

\parallel
0

б) Точка $A(x; y)$ – внутренняя точка $\Delta A_1A_2A_3$ (рис. 1.8).

Проведём через вершину треугольника (например, через A_1) и точку A прямую, которая пересечёт сторону треугольника в точке A_4 .

С одной стороны, так как точка A лежит на отрезке $[A_1A_4]$, то её можно представить в виде линейной комбинации угловых точек отрезка:

$$A = \lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_4 \cdot A_4, \quad \text{где} \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 = 1, \\ \lambda_i > 0, \quad i = 1, 4. \end{cases}$$

С другой стороны, точка A_4 лежит на отрезке $[A_2A_3]$, а значит, имеет место линейная комбинация:

$$A_4 = \mu_2 \cdot A_2 + \mu_3 \cdot A_3, \quad \text{где} \quad \begin{cases} \mu_2 + \mu_3 = 1, \\ \mu_i > 0, \quad i = 2, 3. \end{cases}$$

Следовательно, получим:

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_4 \cdot (\mu_2 A_2 + \mu_3 A_3) = \lambda_1 A_1 + \underbrace{\lambda_4 \mu_2}_{\parallel \lambda_2} A_2 + \underbrace{\lambda_4 \mu_3}_{\parallel \lambda_3} A_3.$$

Заметим, что:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_4 \mu_2 + \lambda_4 \mu_3 = \lambda_1 + \lambda_4 \cdot \underbrace{(\mu_2 + \mu_3)}_{\parallel 1} = \lambda_1 + \lambda_4 = 1$$

Таким образом, с учётом пунктов а) и б) получаем:

$$A = \lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 + \lambda_3 \cdot A_3, \text{ где } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \\ \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (1.2)$$

Следовательно, точка A , для которой выполняются условия (1.2), является *выпуклой линейной комбинацией точек* A_1 , A_2 и A_3 . Геометрически это означает, что точка A является внутренней или граничной точкой $\Delta A_1 A_2 A_3$.

3. Пусть на плоскости заданы точки A_1, A_2, \dots, A_k . Точка $A(x; y)$ – текущая точка многоугольника $A_1 A_2 \dots A_k$.

При помощи диагоналей, проведённых из одной вершины (например, из т. A_1), многоугольник можно разбить на треугольники. Пусть точка A принадлежит одному из треугольников, например, $\Delta A_1 A_2 A_3$. Тогда:

$$A = \lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 + \lambda_3 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4 + \dots + 0 \cdot A_k,$$

$$\text{где } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \dots + \lambda_k = 1, \\ \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{cases}$$

Таким образом, точка A является *выпуклой линейной комбинацией точек* A_1, A_2, \dots, A_k . Геометрически это означает, что A – внутренняя или граничная точка многоугольника $A_1 A_2 \dots A_k$.

4. Пусть в пространстве заданы точки A_1, A_2, \dots, A_k . Точка $A(x; y)$ – текущая точка многогранника $A_1 A_2 \dots A_k$.

Теорема 1.2. *Множество точек выпуклого n -мерного многогранника совпадает с множеством любых выпуклых линейных комбинаций его угловых точек:*

$$A = \lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 + \dots + \lambda_k \cdot A_k, \text{ где } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1, \\ \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{cases} \quad (1.3)$$

► **Прямое утверждение:** точка многогранника есть выпуклая линейная комбинация его угловых точек.

Если произвольная точка A принадлежит грани многогранника, то A есть выпуклая линейная комбинация угловых точек этой грани. Тогда, определив выражение линейной комбинации слагаемыми $0 \cdot A_i$ для всех вершин A_i , не принадлежащих данной грани, получим, что A есть выпуклая линейная комбинация всех угловых точек многогранника.

Пусть произвольная точка A – внутренняя точка многогранника. Проведём сечение многогранника через точку A , получим многоугольник. Тогда точка A есть выпуклая линейная комбинация угловых точек многоугольника сечения. Угловые точки многоугольника сечения, в свою очередь, принадлежат граням многогранника и, следовательно, являются выпуклыми линейными комбинациями угловых точек многогранника.

В конечном итоге, получаем, что A есть выпуклая линейная комбинация всех угловых точек многогранника.

Обратное утверждение: выпуклая линейная комбинация угловых точек выпуклого многогранника определяет его любую точку.

Так как угловые точки принадлежат выпуклому многограннику, то по определению выпуклого множества отрезок, соединяющий любые его две точки (выпуклая линейная комбинация), также принадлежит этому многограннику. ■

1.4. Экономико-математическая модель задачи ЛП

Экономическая постановка задачи. Для изготовления двух видов продукции P_1, P_2 используют три вида сырья S_1, S_2, S_3 :

Вид сырья	Запасы сырья (т)	Количество единиц сырья, идущих на производство единицы продукции (т)	
		P_1	P_2
S_1	20	2	5
S_2	40	8	5
S_3	30	5	6
Прибыль от реализации единицы продукции (у.е.)		50	40

Необходимо выработать такой план выпуска продукции, чтобы при её реализации получить максимальную прибыль.

Для составления математической модели необходимо:

- ввести переменные;
- записать систему ограничений, учитывая имеющиеся в условии задачи показатели и их количественные закономерности;
- составить оптимизируемую функцию исходя из цели задачи.

Математическая постановка задачи.

Введём переменные x_j ($j=1,2$) – количество единиц производимой продукции типа P_j . Необходимо найти набор (план выпуска продукции) $X = (x_1; x_2)$, удовлетворяющий условиям-ограничениям с учётом запасов сырья вида S_i :

чтобы значение функции (прибыль) $L(X) = 50x_1 + 40x_2$ было максимальным.

Определение. *Линейное программирование* (ЛП) – это область математического программирования, изучающая методы нахождения экстремальных (наибольших и наименьших) значений линейной функции конечного числа переменных (наибольшего дохода или наименьших издержек), на неизвестные которой наложены линейные ограничения (по деньгам, или материалам, или времени).

В общем виде математическая **модель задачи ЛП** имеет **вид**:
найти набор переменных $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий ограни-
чениям

при котором функция

достигает своего оптимума (extr – max или min), здесь a_{ij} , b_i , c_j – заданные постоянные величины.

Характерные черты задач ЛП

- 1) показатель оптимальности $L(X)$ представляет собой *линейную функцию* от компонент решения $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$;
- 2) ограничительные условия, налагаемые на возможные решения, имеют вид *линейных равенств или неравенств*.

Определение. Неизвестное x_j – *искомое* количество единиц продукции j -типа.

Определение. Оптимизируемая функция L называется *целевой функцией* или *критерием оптимальности*.

Определение. Числовые коэффициенты c_j целевой функции называются *ценами* соответствующих компонент x_j искомого плана.

Определение. Система линейных уравнений и неравенств, которые представляют собой количественные соотношения между переменными, выражающие условия и требования экономической задачи, называется *системой ограничений* задачи ЛП.

Определение. Свободные числа системы ограничений b_i представляют собой *запасы* (объёмы) i -го ресурса.

Определение. Числовой коэффициент a_{ij} при неизвестной x_j системы ограничений представляет собой *вес* (необходимое количество) i -ого ресурса, идущего на производство единицы продукции j -типа.

Определение. *Решением системы ограничений* называются такие значения $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, которые при подстановке вместо неизвестных в каждое уравнение (неравенство) системы обращают их в верные числовые равенства (неравенства).

Определение. Всякое неотрицательное решение системы ограничений задачи ЛП называется *допустимым планом*.

Определение. Совокупность всех допустимых планов (решений системы ограничений) есть *область допустимых решений* (ОДР).

Определение. Допустимый план задачи ЛП, при котором целевая функция достигает своего экстремального значения, называется *оптимальным*.

При описании реальной ситуации следует проверять наличие у линейной модели таких свойств, как пропорциональность и аддитивность.

Пропорциональность означает, что вклад каждой переменной в целевую функцию и общий объём потребления соответствующих ресурсов должен быть прямо пропорционален величине этой переменной. Например, если, продавая j -й товар по цене 100 рублей, фирма будет делать скидку при определённом уровне закупки до цены в 95 рублей, то будет отсутствовать прямая пропорциональность между доходом фирмы и вели-

чиной переменной x_j . Т.е. в разных ситуациях одна единица j -го товара будет приносить разный доход.

Аддитивность означает, что целевая функция и ограничения должны представлять собой сумму вкладов от различных переменных. Примером нарушения аддитивности служит ситуация, когда увеличение сбыта одного из конкурирующих видов продукции, производимых некоторой фирмой, влияет на объём реализации другого.

Задачи максимизации и минимизации сводятся одна к другой:

$L(X) \rightarrow \max$	$F(X) = -L(X) \rightarrow \min$
Если X^* – оптимальный план задачи максимизации функции L , т.е. для любого плана X выполняется неравенство: $L(X^*) \geq L(X)$,	то справедливо неравенство: $-L(X^*) \leq -L(X)$, т. е. $F(X^*) \leq F(X)$ $\Rightarrow X^*$ – оптимальный план задачи минимизации функции $F = -L$.

1.5. Классификация задач ЛП

Определение. Математическая задача об отыскании экстремального значения линейной функции на множестве неотрицательных решений системы линейных неравенств и уравнений (системы ограничений) называется *общей задачей ЛП*.

Определение. Математическая задача об отыскании экстремального значения линейной функции на множестве неотрицательных решений системы линейных неравенств называется *стандартной*.

Определение. Математическая задача об отыскании экстремального значения линейной функции на множестве неотрицательных решений системы линейных уравнений называется *основной*.

Приведение общей (или стандартной) задачи к основной осуществляется путём введения в неравенства *дополнительных (балансовых) переменных*, для которых определяют условие неотрицательности:

- в неравенства типа « \leq » вводят балансовую переменную со знаком «+»;
- в неравенства типа « \geq » вводят балансовую переменную со знаком «-».

Пример 1.1. Привести к основной форме систему ограничений, заданной

$$\text{в стандартном виде: } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_4 \geq 8, \\ x_2 - 7x_3 - 4x_5 \leq 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

☺ Решение. Введём балансовые переменные x_6, x_7 , добавив в первое неравенство слагаемое $(-x_6)$, во 2-ое неравенство слагаемое $(+x_7)$.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_4 - x_6 = 8, \\ x_2 - 7x_3 - 4x_5 + x_7 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 7}. \end{cases}$$

☺

Теорема 1.3. (о замене линейного неравенства)

Каждому решению $X = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ неравенства

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + \dots + a_n \cdot x_n \leq b \quad (1.4)$$

соответствует единственное решение $\bar{X} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ уравнения

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + \dots + a_n \cdot x_n + x_{n+1} = b \quad (1.5)$$

и неравенства

$$x_{n+1} \geq 0 \quad (1.6)$$

и наоборот.

► Пусть $X = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – решение неравенства (1.4). Тогда справедливо и числовое неравенство: $a_1 \cdot \alpha_1 + a_2 \cdot \alpha_2 + a_3 \cdot \alpha_3 + \dots + a_n \cdot \alpha_n \leq b$.

Обозначим: $b - (a_1 \cdot \alpha_1 + a_2 \cdot \alpha_2 + a_3 \cdot \alpha_3 + \dots + a_n \cdot \alpha_n) = \alpha_{n+1}$.

Тогда: $a_1 \cdot \alpha_1 + a_2 \cdot \alpha_2 + a_3 \cdot \alpha_3 + \dots + a_n \cdot \alpha_n + \alpha_{n+1} = b$, причём $\alpha_{n+1} \geq 0$.

Это означает, что $\bar{X} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ – есть решение уравнения (1.5), удовлетворяющее неравенству (1.6).

Доказательство обратного утверждения опустим. ■

Если для какой-либо переменной системы ограничений *отсутствует условие неотрицательности*, то эту переменную заменяют разностью двух неотрицательных переменных.

Пример 1.2. Ввести условие неотрицательности для всех переменных

системы ограничений:
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_4 \geq 8, \\ x_2 - 7x_3 - 4x_5 \leq 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

☺ Решение. Так как для переменной x_5 отсутствует условие неотрицательности, то представим её в виде разности двух неотрицательных переменных $x_j \geq 0, j = 6, 7$: $x_5 = x_6 - x_7$. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_4 \geq 8, \\ x_2 - 7x_3 - 4 \cdot (x_6 - x_7) \leq 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 6, 7. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_4 \geq 8, \\ x_2 - 7x_3 - 4x_6 + 4x_7 \leq 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 6, 7. \end{cases}$$

☺

1.6. Формы записи основной задачи ЛП

I. Полная форма: $L(X) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 + \dots + c_n \cdot x_n \rightarrow \text{extr}$,

$$\text{II. Краткая форма: } L(X) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \text{extr}, \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

III. Матричная форма: $L(X) = C \cdot X \rightarrow \text{extr}, \begin{cases} A \cdot X = B, \\ X \geq 0, \end{cases}$

где введены матрицы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, C = (c_1 \dots c_n), B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{m\ n} \end{pmatrix}.$$

IV. Векторная форма:

$$L(\bar{X}) = \bar{C} \cdot \bar{X} \rightarrow \text{extr}, \quad \begin{cases} \bar{A}_1 \cdot x_1 + \bar{A}_2 \cdot x_2 + \dots + \bar{A}_n \cdot x_n = \bar{B}, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \end{cases}$$

где введены векторы: $\bar{X} = \{x_1; \dots; x_n\}$, $\bar{B} = \{b_1; \dots; b_m\}$,

$$\overline{C} = \{c_1; \dots; c_n\}, \quad \overline{A}_j = \{a_{1j}; a_{2j}; \dots; a_{mj}\}.$$

1.7. Графический метод решения задач ЛП

Наиболее распространенный метод решения задач ЛП – симплексный метод. Но в простейших случаях удобен графический метод, который является наиболее наглядным.

Графический метод применяется для задач ЛП, для которых стандартная система ограничений содержит не более трёх переменных, и для задач со многими переменными, для которых система ограничений, заданная в основной форме, содержит не более трёх свободных переменных. Он не требует больших предварительных знаний, при аккуратном использовании позволяет получать ответ без привлечения дополнительных средств и, что особенно важно, раскрывает суть идей, лежащих в основе аналитических методов. Графический метод решения основывается на возможности графического изображения области допустимых решений и нахождении среди

них оптимального решения. ОДР задачи строится как пересечение областей решений каждого из ограничений и представляет собой выпуклый многогранник (многоугольник, интервал). Для того, чтобы найти решение задачи ЛП, нужно рассмотреть поведение целевой функции в ОДР.

1.7.1. Графический метод решения стандартной задачи ЛП с одной переменной

Найти решение $X_{\text{опт}} = (x)$ задачи ЛП:

$$L(X) = c \cdot x \rightarrow \text{extr} \text{ при ограничениях вида } \begin{cases} a_{11} \cdot x \geq b_1, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} \cdot x \leq b_m, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Решение системы ограничений представляет собой пересечение лучей, что определяет область допустимых решений (ОДР) – точку, отрезок, луч. Значения целевой функции в угловых точках интервала решений определяют оптимум функции, монотонно убывающей (если $c < 0$) или монотонно возрастающей ($c > 0$). В случае неограниченности ОДР (луч) задача ЛП может и не иметь оптимума.

1.7.2. Графический метод решения стандартной задачи ЛП с двумя переменными

Найти решение $X_{\text{опт}} = (x_1; x_2)$ задачи ЛП:

$$L(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \text{extr} \text{ при ограничениях вида } \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \leq b_1, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 \geq b_m, \\ x_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2. \end{cases}$$

Областью решений неравенства $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 \leq b_i$ является одна из полуплоскостей, на которые прямая $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 = b_i$, соответствующая данному неравенству, делит всю координатную плоскость. Для того чтобы определить, какая из двух координатных полуплоскостей является областью допустимых решений, достаточно координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой, подставить в неравенство. Если получаем верное числовое неравенство, то областью решений является полуплоскость, содержащая данную точку. Если же неравенство не выполняется, то областью решений является полуплоскость, не содержащая данную точку. Областью допустимых решений задачи является общая часть полуплоскостей – областей решений всех неравенств системы ограничений.

Для нахождения среди допустимых решений оптимального решения используют линии уровня и опорные прямые.

Определение. *Линией уровня* называется прямая, на которой целевая функция принимает постоянное значение:

$$L_0: c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}.$$

Все линии уровня с нормальным вектором $\bar{N} = \{c_1; c_2\}$ параллельны между собой.

Для нахождения экстремального значения целевой функции используют вектор градиента функции $\text{grad } L = \left\{ \frac{\partial L}{\partial x_1}; \frac{\partial L}{\partial x_2} \right\}$. Этот вектор показывает направление наискорейшего изменения целевой функции.

Так как $\frac{\partial L}{\partial x_1} = (c_1x_1 + c_2x_2)'_{x_1} = c_1$, $\frac{\partial L}{\partial x_2} = (c_1x_1 + c_2x_2)'_{x_2} = c_2$, то координаты вектора градиента совпадают с координатами вектора нормали $\bar{N} = \{c_1; c_2\}$ целевой функции $L(X)$.

Определение. *Опорной прямой* называется линия уровня, которая касается области допустимых значений.

Опорная прямая имеет хотя бы одну общую точку с ОДР, и по отношению к которой эта область находится в одной из полуплоскостей, на которые опорная прямая делит всю плоскость. ОДР любой задачи имеет не более двух опорных прямых, на одной из которых может находиться оптимальное решение (рис.1.9).

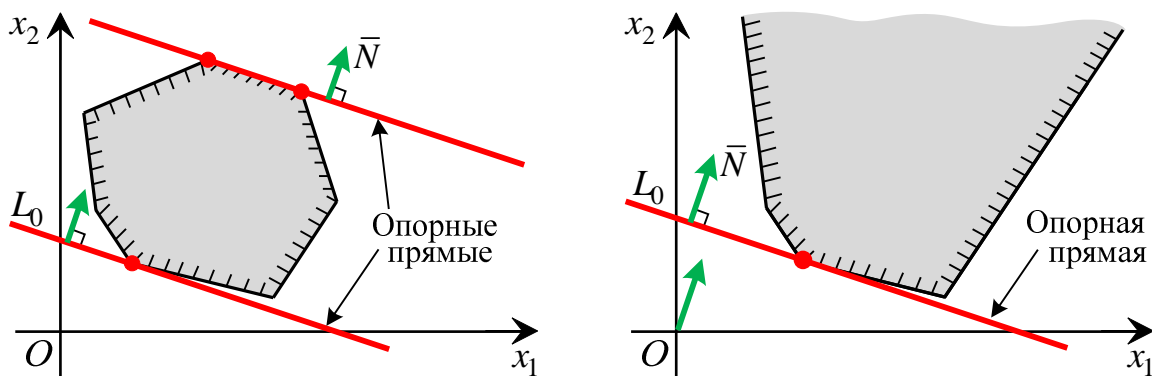


Рис. 1.9

Значения целевой функции на линиях уровня возрастают, если линии уровня перемещать в направлении их нормали, и убывают при перемещении линий уровня в противоположном направлении.

Алгоритм графического метода решения задач ЛП с двумя переменными

1. Находим ОДР для системы ограничений. Если ОДР – пустое множество (рис. 1.10), то задача ЛП неразрешима ввиду несовместности системы ограничений.
2. Если ОДР является непустым множеством (рис. 1.12-1.15), строим вектор нормали $\bar{N} = \{c_1; c_2\}$.
3. Проводим линию уровня L_0 , перпендикулярную вектору \bar{N} (параллельно направляющему вектору $\bar{s} = \{c_2, -c_1\}$).
4. Линию L_0 перемещаем до положения опорной прямой в направлении вектора \bar{N} для задач на максимум и в направлении, противоположном \bar{N} , для задач на минимум. Общая точка (точки) будет точкой экстремума (оптимума) целевой функции в ОДР.
5. Находим координаты точки экстремума и значение целевой функции.

Рассмотрим возможные случаи.

Задача ЛП неразрешима

а) из-за несовместности системы ограничений (система не имеет ни единого решения). В этом случае ОДР – *пустое множество*, так как пересечение всех полуплоскостей не содержит ни одной точки (рис. 1.10).

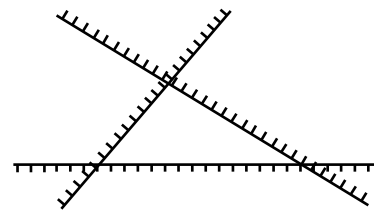


Рис. 1.10.

б) из-за неограниченности целевой функции на ОДР (множество решений обязательно неограниченно, рис. 1.11).

При решении задачи ЛП, например, на максимум значение $L(X) \rightarrow +\infty$ (вектор \bar{N} направлен в сторону неограниченности множества решений). Поэтому линию уровня можно перемещать до бесконечности, не достигнув последней точки пересечения.

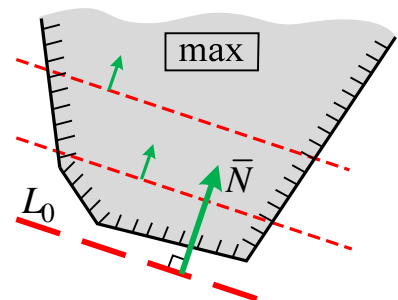


Рис. 1.11.

Задача ЛП разрешима

а) ОДР состоит из одной точки, которая и является точкой оптимума как для задачи максимизации, так и для задачи минимизации целевой функции (рис. 1.12).

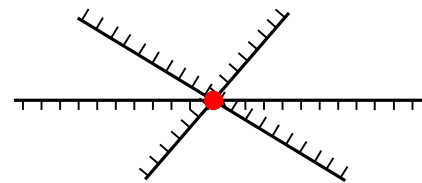


Рис. 1.12.

б) *Единственное оптимальное решение.*

Линия уровня, соответствующая целевой функции в опорном (оптимальном) положении, касается многоугольника решений в одной точке (рис. 1.13).

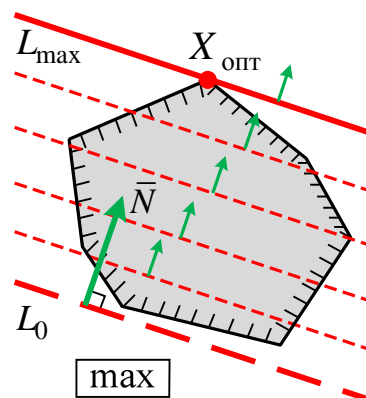


Рис. 1.13.

в) *Оптимальное решение не единственно, но определённо.*

Линия уровня, соответствующая целевой функции в опорном (оптимальном) положении, совпадает со стороной многоугольника решений (вектор \bar{N} перпендикулярен к стороне многоугольника). В этом случае оптимальной является любая точка на отрезке $[AB]$, решение представляется в виде выпуклой линейной комбинации точек A и B (рис. 1.14).

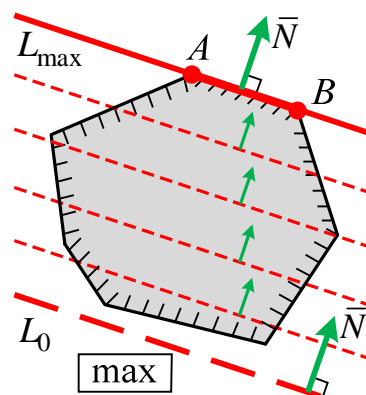


Рис. 1.14.

г) *Оптимальное решение не единственно и неопределённо.*

Линия уровня, соответствующая целевой функции в опорном (оптимальном) положении, совпадает со стороной-лучом неограниченного многоугольника решений (\bar{N} перпендикулярен к стороне-лучу неограниченного многоугольника решений). Здесь оптимальными решениями являются любая точка луча $[AM)$ (рис. 1.15).

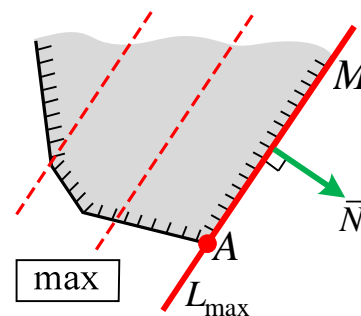


Рис. 1.15.

Если ОДР – неограниченная область, то целевая функция может быть неограниченной (рис. 1.11, 1.15).

Если окажется, что линия уровня параллельна одной из сторон ОДР, то задача ЛП будет иметь бесконечное множество решений (рис. 1.14, 1.15).

Пример 1.3. Найти решение задачи ЛП:

$$L(X) = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \text{ при ограничениях } \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 24, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2. \end{cases}$$

☺ Решение. Проведём рассуждения в соответствии с алгоритмом.

1) Изобразим на плоскости систему координат Ox_1x_2 .

Т.к. заданы ограничения неотрицательности

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

то все построения проводятся в первой четверти (рис. 1.16).

Далее строим множество точек, соответствующее множеству решений основной системы ограничений.

Строим прямую

$$\ell_1: 4x_1 + 6x_2 = 24,$$

соответствующую первому неравенству системы ограничений. Т.к. ℓ_1 не проходит через начало координат, то удобнее всего построить её по точкам пересечения с осями координат. Для этого уравнение ℓ_1 представим в виде

уравнения прямой «в отрезках»: $\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{4} = 1.$

Получаем $B(6;0)$ и $A(0;4)$ – точки пересечения прямой ℓ_1 с осями Ox_1 и Ox_2 соответственно (рис.1.17).

Построенная прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

Для выбора полуплоскости, соответствующей нашему неравенству, возьмём на плоскости точку с известными координатами, не лежащую на прямой ℓ_1 .

Пусть это будет точка $(0;0)$ –

начало координат. Подставим координаты этой точки в первое неравенство:

$$4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 \leq 24 \Rightarrow 0 \leq 24.$$

Получилось верное числовое неравенство. Значит, полуплоскость содержит выбранную для проверки точку.

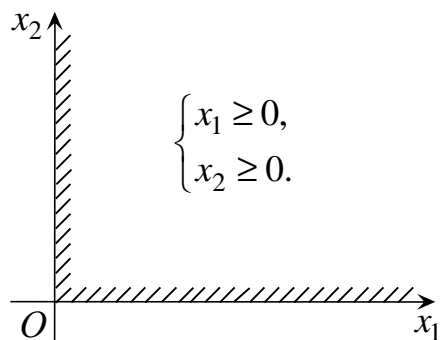


Рис. 1.16.

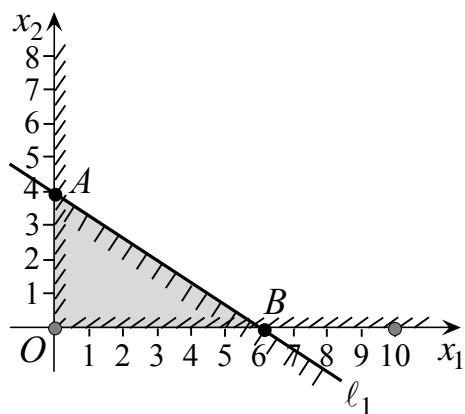


Рис. 1.17.

Замечание. Заметим, что для проверки не обязательно брать начало координат. Главное, чтобы точка не лежала на прямой и имела известные координаты. Например, можно взять точку с координатами $(10;0)$. Подставляем в неравенство:

$$4 \cdot 10 + 6 \cdot 0 \leq 24 \Rightarrow 40 \leq 24.$$

Неравенство получилось неверное. Значит, полуплоскость не содержит точку $(10;0)$.

Таким образом, в совокупности с первой четвертью текущее множество решений представляет собой треугольник OAB (рис. 1.17).

Далее аналогично строятся полуплоскости, соответствующие остальным неравенствам, и пересекаются с текущими множествами.

Второе неравенство $3x_1 + 2x_2 \leq 12$,

$$\Rightarrow 3x_1 + 2x_2 = 12 \text{ — прямая } \ell_2.$$

Запишем уравнение прямой в отрезках: $\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{6} = 1$.

$D(4;0)$ и $C(0;6)$ — точки пересечения прямой ℓ_2 с осями Ox_1 и Ox_2 соответственно (рис. 1.18). Точка для проверки $(0;0)$, подставим её координаты во второе неравенство системы ограничений:

$$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 12 \Rightarrow 0 \leq 12$$

— получили верное неравенство.

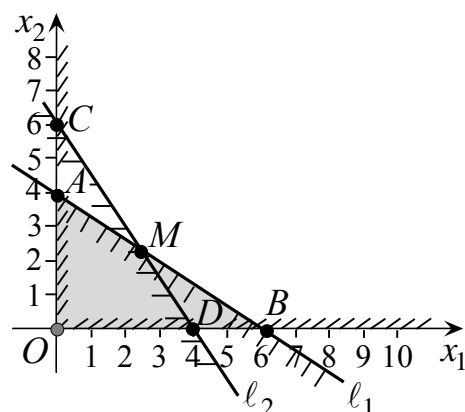


Рис. 1.18.

Следовательно, полуплоскость содержит начало координат. Пересекем её с предыдущим множеством. Получаем четырёхугольник $OAMD$.

Третье неравенство: $x_1 + x_2 \leq 8$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 8$$

— уравнение прямой ℓ_3 в отрезках.

$F(8;0)$ и $E(0;8)$ — точки пересечения прямой с осями Ox_1 и Ox_2 соответственно (рис. 1.19). Подставляя в неравенство точку $(0;0)$, убеждаемся, что полуплоскость содержит эту точку.

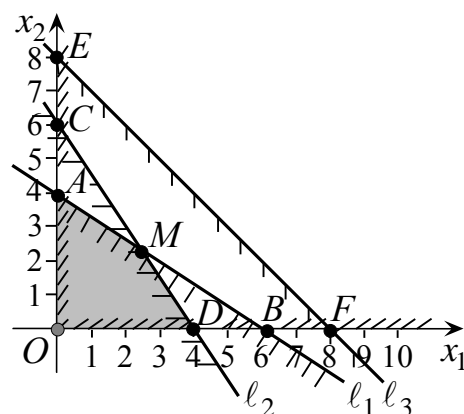


Рис. 1.19.

При пересечении с предыдущим множеством решений получаем, что четырёхугольник $OAMD$ содержится в данной полуплоскости. Это означает, что последнее ограничение не существенно и может быть либо отброшено, либо изменено.

Таким образом, окончательно область допустимых решений задачи линейного программирования представляет собой четырёхугольник $OAMD$ (рис. 1.20).

2) Найдём координаты вектора \bar{N} и построим его. Т.к. целевая функция имеет вид $L(X) = 4x_1 + 5x_2$, то $\bar{N} = \{4; 5\}$ (рис. 1.20).

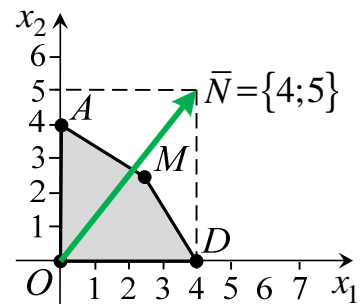


Рис. 1.20.

3) Линия уровня L_0 задаётся уравнением

$$4x_1 + 5x_2 = \text{const}.$$

Определим $\text{const} = 0$ и построим прямую $4x_1 + 5x_2 = 0$, проходящую через начало координат перпендикулярно вектору нормали $\bar{N} = \{4; 5\}$ (рис. 1.21).

Замечание. Линию уровня L_0 можно построить также с помощью направляющего вектора прямой $\bar{s} = \{5; -4\}$.

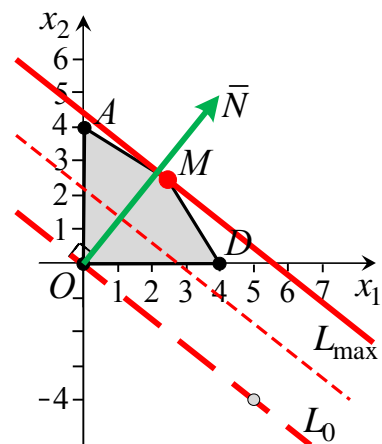


Рис. 1.21.

4) Перемещаем линию уровня L_0 по направлению вектора \bar{N} (т.к. задача на отыскание максимума). Это перемещение проводим до тех пор, пока у линии уровня не окажется только одна общая точка с областью допустимых решений. Получаем точку M – точку экстремума целевой функции в ОДР (рис. 1.21).

5) Находим координаты точки экстремума и значение целевой функции в ней. Точка M является точкой пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_2 . Решая систему соответствующих уравнений, определяем её координаты:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 = 24, \\ 3x_1 + 2x_2 = 12, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{24 - 6x_2}{4}, \\ 3 \cdot \frac{24 - 6x_2}{4} + 2x_2 = 12, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{24 - 6x_2}{4}, \\ 72 - 18x_2 + 8x_2 = 48, \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{24 - 6x_2}{4}, \\ 10x_2 = 24, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{12}{5}, \\ x_2 = \frac{12}{5}, \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{12}{5}; \frac{12}{5}\right). \end{aligned}$$

Точка M определяет оптимальное решение, т. е. $X_{\text{опт}} = \left(\frac{12}{5}; \frac{12}{5}\right)$, при этом $L_{\text{max}} = L(X_{\text{опт}}) = L\left(\frac{12}{5}; \frac{12}{5}\right) = 4 \cdot \frac{12}{5} + 5 \cdot \frac{12}{5} = \frac{108}{5}$.

Ответ: $L_{\text{max}} = L\left(\frac{12}{5}; \frac{12}{5}\right) = \frac{108}{5}$. ☺

Пример 1.4. Найти решение задачи ЛП:

$$L(X) = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \min \text{ при ограничениях } \begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 16, \\ x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_1 \leq 4 \\ x_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2. \end{cases}$$

☺ Решение. Строим ОДР, вектор $\bar{N} = \{4; 2\}$ и одну из линий уровня L_0 (например, $4x_1 + 2x_2 = 0$).

Определяем положения опорных прямых семейства линий уровня по отношению к ОДР (рис. 1.22).

Т.к. решается задача на отыскание минимума функции, то зафиксируем положение опорной прямой в направлении, противоположном вектору \bar{N} . В результате полученная опорная прямая совпадает с граничной прямой ℓ_2 и проходит через две угловые точки этой области A и B . Данная задача имеет бесконечное множество оптимальных решений, являющихся точками отрезка $[AB]$.

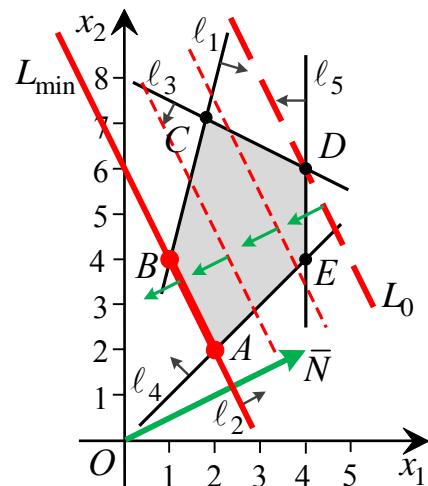


Рис. 1.22

Находим точки $A = \ell_2 \cap \ell_4$ и $B = \ell_2 \cap \ell_1$:

$$\begin{aligned} & + \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6, & (\ell_2) \\ x_1 - x_2 = 0, & (\ell_4) \end{cases} \quad + \begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0, & (\ell_1) \\ 2x_1 + x_2 = 6, & (\ell_2) \end{cases} \\ & 3x_1 = 6 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 2. \end{cases} \Rightarrow X_{\text{опт}}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad 6x_1 = 6 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 4. \end{cases} \Rightarrow X_{\text{опт}}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда общее решение (выпуклая линейная комбинация точек A, B):

$$X_{\text{опт}} = (1-\lambda) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ 2+2\lambda \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

$$\min L = L(X_{\text{опт}}) = L(X_{\text{опт}}^1) = L(X_{\text{опт}}^2) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 12.$$

$$\text{Ответ: } L_{\min} = L \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ 2+2\lambda \end{pmatrix} = 12, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad \text{☺}$$

Пример 1.5. Найти решение задачи ЛП:

$$L(X) = 3x_1 + 7x_2 \rightarrow \max \text{ при ограничениях } \begin{cases} 5x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 0, \\ x_2 \geq 3, \\ x_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2. \end{cases}$$

☺ Решение. Строим область допустимых решений, вектор $\bar{N} = \{3; 7\}$ и линии уровня $L_0: 3x_1 + 7x_2 = \text{const}$. (рис. 1.23).

В данной задаче необходимо найти максимум целевой функции, поэтому линию уровня перемещаем в направлении нормального вектора. Ввиду того, что в этом направлении область допустимых решений не ограничена, линия уровня “уходит в бесконечность”, при этом $\max L(X) \rightarrow +\infty$.

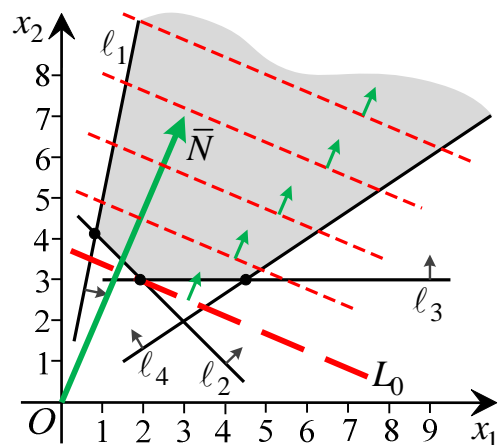


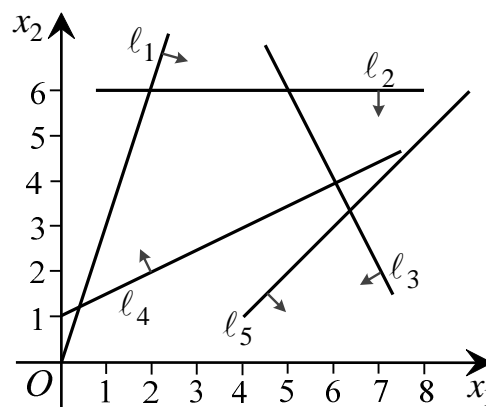
Рис. 1.23

Ответ: задача не имеет решения. ☺

Пример 1.6. Найти решение задачи ЛП:

$$L(X) = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \text{ при ограничениях } \begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 \geq 16, \\ x_1 - 2x_2 \leq -2, \\ x_1 - x_2 \geq 3, \\ x_2 \leq 6, \\ x_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2. \end{cases}$$

Область допустимых решений задачи (рис. 1.24) является пустым множеством ввиду несовместности системы ограничений.



Ответ: задача не имеет решения.



Пусть необходимо найти решение $X_{\text{опт}} = (x_1; x_2; x_3)$ задачи ЛП:

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + a_{i3}x_3 = b_i.$$
$$L_0 = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3$$

Определение. Плоскость $L_0 = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3$, имеющая с многогранником решений, расположенным по одну сторону от неё, хотя бы одну общую точку, называется *опорной*.

Значение L_0 в положении опорной плоскости определяет экстремальное значение целевой функции.

1.7.4. Графический метод решения основной задачи

С помощью графического метода может быть решена основная задача ЛП, система ограничений (уравнений) которой удовлетворяет условиям $1 \leq n - r \leq 3$, где n – число неизвестных системы, r – ранг системы. Если уравнения системы ограничений линейно независимы, то ранг r равен числу уравнений системы m .

Рассмотрим **алгоритм** решения основной задачи ЛП, когда система ограничений содержит **n переменных** и **$(n - 2)$ линейно независимых уравнений**:

$$L(X) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 + \dots + c_n \cdot x_n \rightarrow \text{extr},$$

Расширенную матрицу системы с помощью элементарных преобразований строк можно привести к виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{1,n-1} & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{a}_{2,n-1} & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{n-2,n-1} & \tilde{a}_{n-2,n-1} & \tilde{b}_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Тогда соответствующая система ограничений примет вид:

Выражая базисные неизвестные x_1, x_2, \dots, x_{n-2} (каждая из них содержится только в одном уравнении) и учитывая их неотрицательность, получим систему неравенств с неизвестными x_{n-1}, x_n :

Таблица 1.1

Переменные					
базисные			свободные		
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	①	1	2	-3	4
1	1	4	1	-8	3
0	1	1	0	-4	-4
-1	-1	1	3	7	0
-1	1	1	2	-3	4
2	0	3	-1	-5	-1
①	0	0	-2	-1	-8
-2	0	2	5	4	4
0	1	1	0	-4	-4
0	0	③	3	-3	15
1	0	0	-2	-1	-8
0	0	2	1	2	-12
0	1	0	-1	-3	-9
0	0	1	1	-1	5
1	0	0	-2	-1	-8
0	0	0	-1	4	-22

Система уравнений-ограничений

Целевая функция

Система уравнений-ограничений

Целевая функция

Система уравнений-ограничений

Целевая функция

Система уравнений-ограничений

Целевая функция

}

}

}

}

}

}

}

Система уравнений-ограничений

Целевая функция

Система уравнений-ограничений

Целевая функция

Система уравнений-ограничений

Целевая функция

Используя последнюю часть табл. 1.1, запишем задачу ЛП в преобразованном виде:

$$L(X) = -x_4 + 4x_5 + 22 \rightarrow \min \text{ при ограничениях } \begin{cases} x_2 - x_4 - 3x_5 = -9, \\ x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 - 2x_4 - x_5 = -8, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Отбросим в уравнениях-ограничениях неотрицательные базисные переменные x_1, x_2, x_3 и заменим знак равенства знаками неравенства “ \leq ”.

Получим вспомогательную задачу с двумя переменными x_4 и x_5 :

$$L(X) = -x_4 + 4x_5 + 22 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -x_4 - 3x_5 \leq -9, \\ x_4 - x_5 \leq 5, \\ -2x_4 - x_5 \leq -8, \\ x_j \geq 0, \quad j = 4, 5. \end{cases}$$

Решаем задачу графическим методом (рис. 1.25). Свободный член 22 в целевой функции не влияет на отыскание оптимального решения и учитывается только при вычислении значения целевой функции.

Находим оптимальное решение вспомогательной задачи.

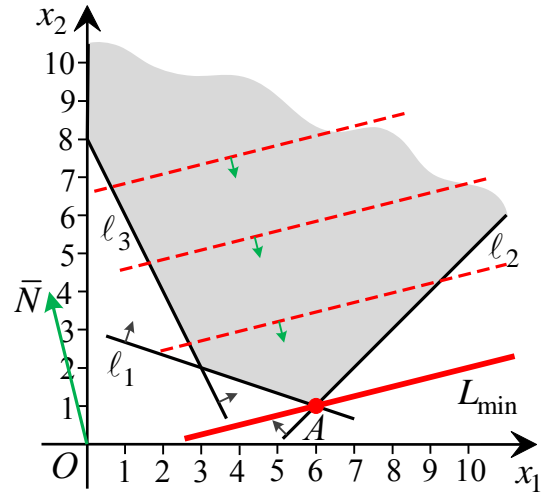


Рис. 1.25.

Определим координаты точки $A = X_{\text{опт}} = \ell_2 \cap \ell_1$:

$$+ \begin{cases} -x_4 - 3x_5 = -9, & (\ell_1) \\ x_4 - x_5 = 5, & (\ell_2) \end{cases}$$

$$-4x_5 = -4 \Rightarrow x_5 = 1, \quad x_4 = 6; \quad \tilde{X}_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\min L = L(\tilde{X}_{\text{опт}}) = L(6; 1) = -1 \cdot 6 + 4 \cdot 1 + 22 = 20.$$

Находим оптимальное решение исходной задачи, используя систему ограничений (1.8):

$$\begin{cases} x_2 - x_4 - 3x_5 = -9, \\ x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 - 2x_4 - x_5 = -8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_4 + 3x_5 - 9, \\ x_3 = -x_4 + x_5 + 5, \\ x_1 = 2x_4 + x_5 - 8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 6 + 3 \cdot 1 - 9 = 0, \\ x_3 = -6 + 1 + 5 = 0, \\ x_1 = 2 \cdot 6 + 1 - 8 = 5. \end{cases}$$

Окончательно получаем $\min L = L(X_{\text{опт}}) = L(5; 0; 0; 6; 1) = 20$.



Пример 1.8. (Определение оптимального плана выпуска изделий)

Компания “Морозко” выпускает два вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженого используют два исходных продукта: молоко и наполнители:

Исходный продукт	Расход продуктов на 1 кг мороженого		Запас, кг
	сливочное	шоколадное	
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более чем на 100 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг в сутки. Отпускная цена на 1 кг сливочного мороженого 160 руб., шоколадного – 140 руб.

Требуется определить, какое количество мороженого каждого вида должна производить компания, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

☺ Решение. Пусть x_1 – суточный объём выпуска сливочного мороженого (кг), а x_2 – суточный объём выпуска шоколадного мороженого (кг).

Математическая модель. Найти решение $X_{\text{опт}} = (x_1; x_2)$ задачи ЛП:

$$L(X) = 160x_1 + 140x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 \leq 400, & (1.9.1) \\ 0,4x_1 + 0,8x_2 \leq 365, & (1.9.2) \\ x_1 - x_2 \leq 100, & (1.9.3) \\ x_2 \leq 350, & (1.9.4) \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}. & (1.9.5) \end{cases}$$

Решим задачу графическим методом (рис. 1.26).

Найдём ОДР, определяемую системой ограничений (1.9.1-1.9.5).

Уравнения, соответствующие ограничениям (1.9.1-1.9.4), имеют вид:

$$\ell_1: 0,8x_1 + 0,5x_2 = 400,$$

$$\ell_2: 0,4x_1 + 0,8x_2 = 365,$$

$$\ell_3: x_1 - 0,8x_2 = 100,$$

$$\ell_4: x_2 = 350.$$

Строим вектор $\bar{N} = \{160; 140\}$ целевой функции и линии уровня L_0 :

$$160x_1 + 140x_2 = \text{const}.$$

Перемещаем линии уровня по направлению вектора \bar{N} . Точкой выхода L_0 из области допустимых решений является точка C , её координаты определяются пересечением прямых ℓ_1 и ℓ_2 , заданных уравнениями:

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 = 400, \\ 0,4x_1 + 0,8x_2 = 365. \end{cases}$$

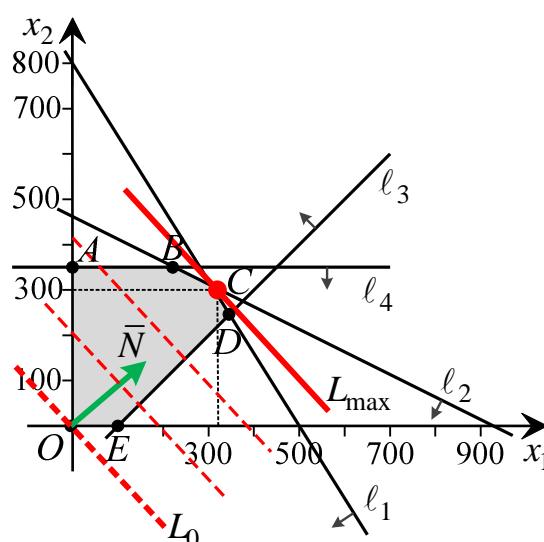


Рис. 1.26.

Решая систему, получаем: $C(312,5; 300)$. Точка C определяет оптимальное решение $X_{\text{опт}} = (312,5; 300)$, при этом оптимум целевой функции:

$$L_{\text{max}} = L(X_{\text{опт}}) = L(312,5; 300) = 160 \cdot 312,5 + 140 \cdot 300 = 92\,000 \text{ руб.}$$

Ответ: максимальный ежедневный доход (выручка) от реализации составит 92 000 руб. в сутки при выпуске 312,5 кг сливочного и 300 кг шоколадного мороженого. ☺

1.7.5. Графический анализ устойчивости

Модель линейного программирования является как бы “моментальным снимком” реальной ситуации, при которой параметры модели (коэффициенты целевой функции и неравенств ограничений) предполагаются неизменными. Т.е. оптимальное решение задачи ЛП определяется теми условиями, которые нашли отражение в модели в момент её формирования. В реальной жизни условия, формирующие модель, не остаются неизменными. В связи с этим особое значение приобретают средства, позволяющие оценить изменения в оптимальном решении, вызванные изменениями в параметрах исходной модели. Таким средством является анализ устойчивости. Он предлагает эффективные вычислительные методы, позволяющие изучить динамическое поведение оптимального решения.

Определение. Исследование влияния изменения параметров модели на оптимальное решение задачи ЛП называется *анализом устойчивости*.

Разберём основные идеи методов анализа устойчивости, основанного на графическом решении задачи ЛП. Рассмотрим два случая:

- 1) изменение коэффициентов целевой функции;
 - 2) изменение значений констант в правой части неравенств ограничений.
- Подробно методы этого анализа будут описаны в главе 2.

I. Изменение коэффициентов целевой функции

Изменение значений коэффициентов c_1 и c_2 целевой функции приводит к изменению угла наклона линии уровня $L_0: c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ (или

$x_2 = -\frac{c_1}{c_2}x_1 + \frac{\text{const}}{c_2}$, где $k = -\frac{c_1}{c_2}$ – угловой коэффициент). Это может ока-

зать влияние на оптимальное решение – оно будет достигаться в другой угловой точке ОДР. Вместе с тем, очевидно, *существуют интервалы изменения коэффициентов c_1 и c_2 , при которых текущее оптимальное решение сохраняется*, т. е. когда линия уровня – опорная прямая вращается вокруг точки оптимума. Задача анализа устойчивости и состоит в получении такой информации. В частности, представляет интерес определение *интервала оптимальности* для отношений $\frac{c_1}{c_2}$ или $\frac{c_2}{c_1}$. Если значение

отношения $\frac{c_1}{c_2}$ (или $\frac{c_2}{c_1}$) не выходит за пределы этого интервала, то оптимальное решение в данной модели сохраняется неизменным.

Проведём экономический анализ примера 1.8 по производству мороженого, согласно найденному оптимальному решению.

Линия максимального уровня L_{\max} сохраняет положение оптимума в точке C , вращаясь вокруг неё между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 , которые в пересечении и определили текущую точку оптимума (рис.1.27).

Таким образом, угол наклона линии уровня будет лежать между углами наклона этих прямых, т. е. справедливо двойное неравенство

$$k_1 \leq k \leq k_2.$$

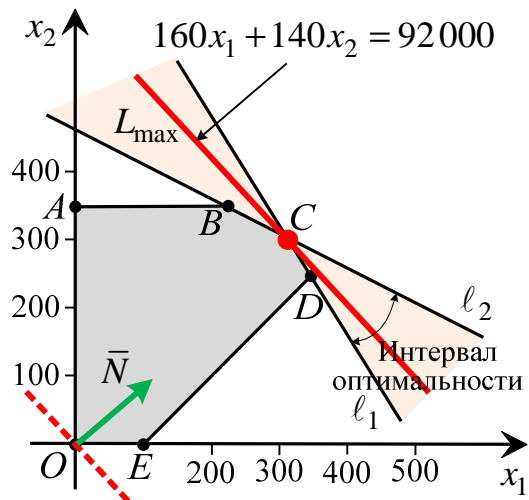


Рис. 1.27.

$$\ell_1: 0,8x_1 + 0,5x_2 = 400, \quad k_1 = -\frac{0,8}{0,5} = -\frac{8}{5};$$

$$\ell_2: 0,4x_1 + 0,8x_2 = 365, \quad k_2 = -\frac{0,4}{0,8} = -\frac{1}{2}.$$

Тогда $k_1 \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq k_2$ или $-\frac{8}{5} \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -\frac{1}{2}$.

Отсюда получим:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{8}{5} \quad \text{или} \quad \frac{5}{8} \leq \frac{c_2}{c_1} \leq \frac{2}{1}. \quad (1.10)$$

Из рис. 1.27 очевидно, что опорная прямая L_0 не может быть ни горизонтальной ($c_1 \neq 0$), ни вертикальной ($c_2 \neq 0$). Если же c_1 и c_2 принимают нулевые значения, интервал оптимальности для отношения $\frac{c_1}{c_2}$ (или $\frac{c_2}{c_1}$) необходимо разбить на два подмножества, где знаменатели не обращались бы в нуль.

Чтобы $C(312,5;300)$ оставалась точкой максимума, необходимо потребовать, чтобы вектор $\bar{N} = \{c_1; c_2\}$ прямой L_0 был направлен в правый верхний угол ($c_1 > 0$, $c_2 > 0$).

✓ Итак, если коэффициенты c_1 и c_2 удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{8}{5}, \\ c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \end{cases}$$

то оптимальное решение будет достигаться в т.С. При этом, если прямая L_{\max} совпадёт с прямой ℓ_1 , то оптимальным решением будет любая точка отрезка $[CD]$. Аналогично, если прямая L_{\max} совпадёт с прямой ℓ_2 , то оптимальным решением будет любая точка отрезка $[BC]$. Заметим, что в обоих случаях точка С остаётся точкой оптимального решения.

Неравенства (1.10) можно использовать при определении интервала оптимальности для коэффициента целевой функции, если предположить, что другой коэффициент остаётся неизменным.

$c_2 = 140$	$c_1 = 160$
$\frac{1}{2} \leq \frac{c_1}{140} \leq \frac{8}{5} \Big \cdot 140$ $\Rightarrow 70 \leq c_1 \leq 224.$	$\frac{5}{8} \leq \frac{c_2}{160} \leq \frac{2}{1} \Big \cdot 160$ $\Rightarrow 100 \leq c_2 \leq 320.$
$L'(C) = (70x_1 + 140x_2) \Big _C =$ $= 70 \cdot 312,5 + 140 \cdot 300 = 63875 \text{ руб.};$ $L''(C) = (224x_1 + 140x_2) \Big _C =$ $= 224 \cdot 312,5 + 140 \cdot 300 = 112000 \text{ руб.}$	$L'(C) = (160x_1 + 100x_2) \Big _C =$ $= 160 \cdot 312,5 + 100 \cdot 300 = 80000 \text{ руб.};$ $L''(C) = (160x_1 + 320x_2) \Big _C =$ $= 160 \cdot 312,5 + 320 \cdot 300 = 146000 \text{ руб.}$

Итак, оптимальное решение задачи не изменится, если:

- ✓ при цене 160 руб. за 1 кг сливочного мороженого цена 1 кг шоколадного мороженого будет находиться в диапазоне от 100 до 320 руб., при этом доход компании составит от 80 000 до 146 000 руб.;
- ✓ при цене 140 руб. за 1 кг шоколадного мороженого цена 1 кг сливочного мороженого будет находиться в диапазоне от 70 до 224 руб. Доход компании составит от 63 875 до 112 000 руб.

II. Изменение запасов ресурсов в правой части неравенств ограничений. Доступность ресурсов

Во многих моделях ЛП ограничения трактуются как условия ограниченности ресурсов. В таких ограничениях правая часть неравенств является верхней границей количества ресурсов. Проанализируем устойчивость оптимального решения при изменении ограничений, налагаемых на ресурсы. Определим, как влияет на оптимальное решение задачи по производству мороженого изменение запасов исходных продуктов.

Определение. Если граничная прямая ОДР проходит через точку, в которой находится оптимальное решение, то она представляет собой *активное ограничение*; соответствующий ресурс относится к *дефицитным*, так как он используется полностью. В противном случае – прямая является *пассивным ограничением*; ресурс – *недефицитный* (имеется в избытке).

В примере 1.8 активными являются 1-ое и 2-ое ограничения ОДР (так как оптимум определяется в точке $C = \ell_1 \cap \ell_2$), а 3-е и 4-ое – пассивные. Т. е. ресурсы $S_1 = 400$ кг и $S_2 = 365$ кг дефицитны, а ресурсы $S_3 = 100$ кг и $S_4 = 350$ кг имеются в избытке.

При изменении объёма ресурса S_i граничная прямая ℓ_i может параллельно перемещаться (меняется константа в правой части уравнения).

1) Проанализируем изменение текущего уровня дефицитного ресурса S_1 “молоко”. По условию $b_1 = 400$ кг. Граничную прямую ℓ_1 перемещаем параллельно самой себе, оставляя активным ограничение ℓ_2 . При этом точка C оптимального решения “плывёт” вдоль отрезка $[BM]$ (рис.1.28).

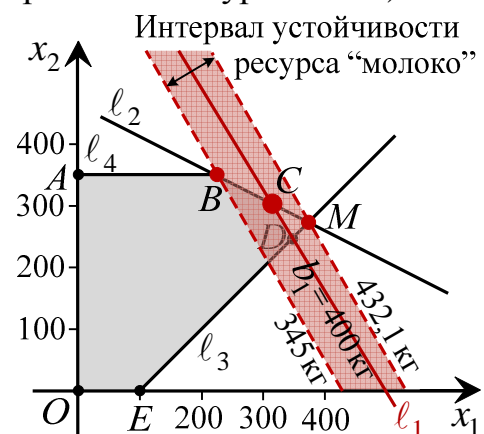


Рис.1.28.

$B = \ell_2 \cap \ell_4: \begin{cases} 0,4x_1 + 0,8x_2 = 365, \\ x_2 = 350. \end{cases}$ $\Rightarrow B(212,53; 350).$	$M = \ell_2 \cap \ell_3: \begin{cases} 0,4x_1 + 0,8x_2 = 365, \\ x_1 - x_2 = 100. \end{cases}$ $\Rightarrow M(370,83; 270,83).$
Подставляя найденные координаты в неравенство (1.9.1) системы ограничений, получим: $b_1(B) = (0,8x_1 + 0,5x_2) _B =$ $= 0,8 \cdot 212,5 + 0,5 \cdot 350 = 345 \text{ кг.}$	Подставляя найденные координаты в неравенство (1.9.1) системы ограничений, получим: $b_1(M) = (0,8x_1 + 0,5x_2) _M =$ $= 0,8 \cdot 370,83 + 0,5 \cdot 270,83 = 432,1 \text{ кг.}$
Оптимум целевой функции: $L(B) = (160x_1 + 140x_2) _B =$ $= 160 \cdot 212,5 + 140 \cdot 350 = 83000 \text{ руб.}$	Оптимум целевой функции: $L(M) = (160x_1 + 140x_2) _M =$ $= 160 \cdot 370,83 + 140 \cdot 270,83 = 97249 \text{ руб.}$

✓ Таким образом, интервал устойчивости для ресурса S_1 “молоко” составляет от 345 до 432,1 кг (оптимум в точке $C = \ell_1 \cap \ell_2$). Доход компании составит от 83 000 до 97 249 руб.

Определим текущий уровень запаса молока как $b_1 + \Delta b_1 = 400 + b_1$, где Δb_1 – отклонение запаса молока от исходного уровня в 400 кг. Тогда:

$$345 \leq 400 + \Delta b_1 \leq 432,1 \Rightarrow -55 \leq \Delta b_1 \leq 32,1.$$

✓ Текущий уровень запаса молока может быть уменьшен не более чем на 55 кг и увеличен не более чем на 32,1 кг. В этом случае гарантируется, что оптимальное решение будет достигаться в точке $C = \ell_1 \cap \ell_2$.

2) Проанализируем изменение текущего уровня дефицитного ресурса S_2 “наполнители”. По условию $b_2 = 365$ кг. Граничную прямую ℓ_2 перемещаем параллельно самой себе, оставляя активным ограничение ℓ_1 . В этом случае точка C оптимального решения “плывёт” вдоль отрезка $[DP]$ (рис.1.29).

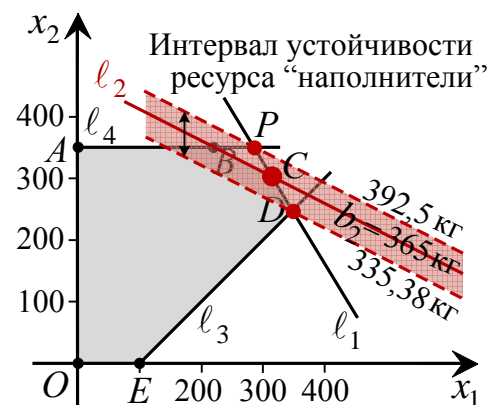


Рис.1.29.

$D = \ell_1 \cap \ell_3: \begin{cases} 0,8 \cdot x_1 + 0,5 \cdot x_2 = 400, \\ x_1 - x_2 = 100. \end{cases}$ $\Rightarrow D(346,15; 246,15).$	$P = \ell_1 \cap \ell_4: \begin{cases} 0,8 \cdot x_1 + 0,5 \cdot x_2 = 400, \\ x_2 = 350. \end{cases}$ $\Rightarrow P(281,25; 350).$
Подставляя найденные координаты в неравенство (1.9.2), получим: $b_2(D) = (0,4x_1 + 0,8x_2) _D =$ $= 0,4 \cdot 346,15 + 0,8 \cdot 246,15 = 335,38 \text{ кг.}$	Подставляя найденные координаты в неравенство (1.9.2), получим: $b_2(P) = (0,4x_1 + 0,8x_2) _P =$ $= 0,4 \cdot 281,25 + 0,8 \cdot 350 = 392,5 \text{ кг.}$
Оптимум целевой функции: $L(D) = (160x_1 + 140x_2) _D =$ $= 160 \cdot 346,15 + 140 \cdot 246,15 = 89845 \text{ руб.}$	Оптимум целевой функции: $L(P) = (160x_1 + 140x_2) _P =$ $= 160 \cdot 281,25 + 140 \cdot 350 = 94000 \text{ руб.}$

✓ Таким образом, интервал устойчивости для ресурса S_2 “наполнитель” составляет от 335,38 до 392,5 кг (оптимум в точке $C = \ell_1 \cap \ell_2$). Доход компании составит от 89 845 до 94 000 руб.

Если определим текущий уровень запаса наполнителей как $b_2 + \Delta b_2 = 365 + \Delta b_2$, где Δb_2 – отклонение запаса наполнителя от исходного уровня в 365 кг, то получим двойное неравенство:

$$335,38 \leq 365 + \Delta b_2 \leq 392,5 \Rightarrow -29,62 \leq \Delta b_2 \leq 27,5.$$

✓ Текущий уровень запаса наполнителей может быть уменьшен не более чем на 29,62 кг и увеличен не более чем на 27,5 кг. В этом случае гарантируется, что оптимум будет достигаться в точке $C = \ell_1 \cap \ell_2$.

Рассмотрим возможность изменений правой части пассивных ограничений.

3) Не изменяя оптимальное решение, прямую ℓ_3 можно перемещать параллельно самой себе вверх до точки C и вниз до пересечения с осью Ox_1 в точке Q , т.е. вдоль отрезка $[CQ]$ (рис.1.30).

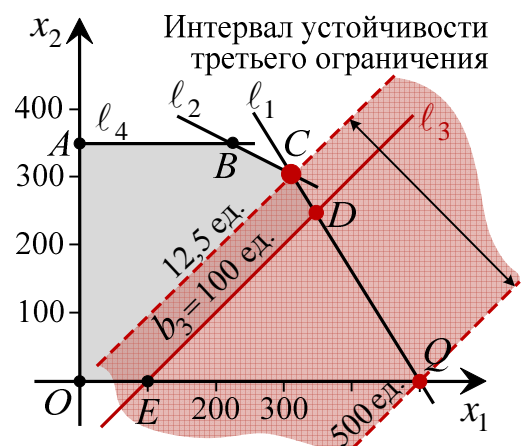


Рис.1.30.

$C(312,5;300)$	$Q(500;0)$
Подставляя координаты в неравенство (1.9.3), получим: $b_3 = (x_1 - x_2) _C = 312,5 - 300 = 12,5$ кг.	Подставляя координаты в неравенство (1.9.3), получим: $b_3 = (x_1 - x_2) _Q = 500 - 0 = 500$ кг.
Оптимум целевой функции: $L(C) = (160x_1 + 140x_2) _C =$ $= 160 \cdot 312,5 + 140 \cdot 300 = 92000$ руб.	Оптимум целевой функции: $L(Q) = (160x_1 + 140x_2) _Q =$ $= 160 \cdot 500 + 140 \cdot 0 = 80000$ руб.

Найдём отклонение для ограничения (1.9.3):

$$12,5 \leq b_3 + \Delta b_3 \leq 500 \Rightarrow 12,5 \leq 100 + \Delta b_3 \leq 500 \Rightarrow -87,5 \leq \Delta b_3 \leq 400.$$

Значит, при неизменном оптимальном решении текущий уровень третьего ограничения b_3 может быть уменьшен не более чем на 87,5 ед. и увеличен не более чем на 400 ед.

Вообще говоря, уровень третьего ограничения может быть увеличен и более чем на 400 ед. В этом случае ограничение (1.9.3) станет вырожденным (не будет играть никакой роли в системе ограничений задачи).

✓ Таким образом, при неизменном оптимальном решении:

$$L_{\max} = L(C) = 92000 \text{ (руб.)}$$

разница в покупательском спросе между сливочным и шоколадным мороженым может изменяться в диапазоне от 12,5 до 500 (и более) кг.

4) Аналогично, не изменяя оптимальное решение, прямую ℓ_4 можно перемещать параллельно самой себе вверх до пересечения с осью Ox_2 в точке R или вниз до точки C (рис.1.31).

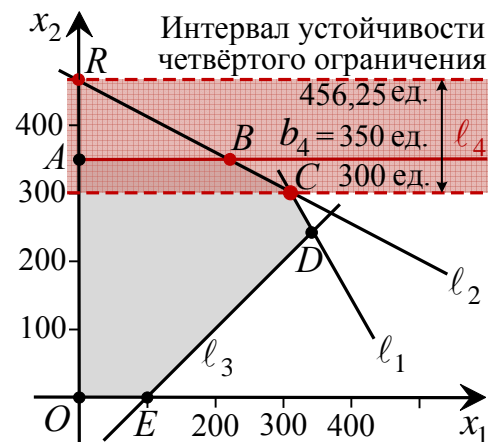


Рис.1.31.

$C(312,5; 300)$	$R(0;456,25)$
Подставляя координаты в неравенство (1.9.4), получим: $b_4(C) = (x_2) _C = 300$ кг.	Подставляя координаты в неравенство (1.9.4), получим: $b_4(R) = (x_2) _R = 456,25$ кг.
Оптимум целевой функции: $L(C) = (160x_1 + 140x_2) _C =$ $= 160 \cdot 312,5 + 140 \cdot 300 = 92000$ руб.	Оптимум целевой функции: $L(R) = (160x_1 + 140x_2) _R =$ $= 160 \cdot 0 + 140 \cdot 456,25 = 63875$ руб.

Найдём отклонение для ограничения (1.9.4):

$$300 \leq b_4 + \Delta b_4 \leq 456,25 \Rightarrow 300 \leq 350 + \Delta b_4 \leq 456,25 \Rightarrow -50 \leq \Delta b_4 \leq 806,25.$$

Итак, при неизменном оптимальном решении: $L_{\max} = L(C) = 92\,000$ текущий уровень четвёртого ограничения b_4 может быть уменьшен не более чем на 50 ед. и увеличен не более чем на 806,25 ед.

Вообще говоря, уровень четвёртого ограничения может быть увеличен и более чем на 806,25 ед. В этом случае ограничение (1.9.4) станет вырожденным (не будет играть никакой роли в системе ограничений исходной задачи ЛП).

✓ Таким образом, при неизменном оптимальном решении:

$$L_{\max} = L(C) = 92\,000 \text{ (руб.)}$$

покупательский спрос на шоколадное мороженое может изменяться в диапазоне от 300 до 456,25 (и более) кг.

III. Стоимость ресурсов

На рис. 1.32 модель ЛП представлена как модель “вход-выход”, где ограниченные ресурсы соответствуют входу модели, а значение целевой функции – выходу.



Рис. 1.32.

Устойчивость модели можно оценить по степени влияния входа (ресурсов) на выход (значение целевой функции).

Определение. Стоимость y_i соответствующего i -го ресурса-ограничения называют *мерой устойчивости* или *объективно обусловленными оценками* (двойственными оценками) соответствующих ресурсов (ООО). Переменные y_i часто называют *теневыми*, *учётными* или *неявными ценами* или *симплексными мультипликаторами*.

Смысл этих названий состоит в том, что это условные, “ненастоящие” цены. В отличие от цен c_1, c_2, \dots, c_n на продукцию, известных, как правило, до начала производства, цены ресурсов-ограничений y_1, y_2, \dots, y_m являются “внутренними (условными)”, ибо они задаются не извне, а определяются непосредственно в результате решения задачи. Чаше их называют *оценками* ресурсов-ограничений.

Меру устойчивости для ресурсов (ограничений) можно получить как побочный продукт вычисления их интервалов устойчивости. Определим *стоимость единицы ресурса-ограничения*, как отношение изменения значения целевой функции к изменению доступного количества ресурсов-ограничений:

$$y_i = \frac{\text{изменение значения } L, \text{ соответствующего интервалу устойчивости ресурса } i}{\text{длина интервала устойчивости ресурса } i}$$

Мера устойчивости y_i недефицитных ресурсов (ограничений) равна нулю, так как изменение их запасов не приводит к изменению в оптимальном решении значения целевой функции.

Проиллюстрируем этот показатель на примере компании “Морозко”.

При изменении запасов молока от 345 до 432,1 кг (интервал устойчивости ресурса “молоко”) значения целевой функции L будут соответствовать положению точки C на отрезке $[BM]$. Если точка C совпадёт с точкой B , то $L = 83000$ (руб.), если же точка C совпадёт с точкой M , тогда $L = 97249$ (руб.). Обозначив через y_1 стоимость единицы ресурса “молоко” (проще говоря – 1 кг молока), получим:

$$y_1 = \frac{\Delta L_{[BM]}}{\Delta b_1[BM]} = \frac{L(M) - L(B)}{b_1(M) - b_1(B)} = \frac{97249 - 83000}{432,1 - 345} = 163,6 \text{ (руб. за 1 кг}$$

молока в готовой продукции).

Таким образом, изменение запаса молока на 1 кг (при общем его количестве не менее 345 кг и не более 432,1 кг) приводит к изменению в оптимальном решении значения целевой функции на 163,6 руб.

Аналогично для ресурса “наполнитель”:

$$y_2 = \frac{\Delta L_{[DP]}}{\Delta b_2[DP]} = \frac{L(P) - L(D)}{b_2(P) - b_2(D)} = \frac{94000 - 89845}{392,5 - 335,38} = 72,7 \text{ (руб. за 1 кг}$$

наполнителей в готовой продукции).

Таким образом, изменение запасов наполнителей на 1 кг (при общем количестве не менее 335,38 и не более 392,5 кг) приводит к изменению в оптимальном решении значения целевой функции на 72,7 руб.

Для недефицитных 3-го и 4-го ограничений имеем:

$$y_3 = y_4 = 0 \text{ (т. к. } \Delta L = 0 \text{)}.$$

Чем больше ООО, тем дефицитнее ресурс-ограничение.

Проранжируем (выстроим в порядке убывания) ресурсы-ограничения в задаче по производству мороженого компании “Морозко”:

$y_1 = 163,6$ – самый дефицитный 1-й ресурс;

$y_2 = 72,7$ – менее дефицитен 2-й ресурс;

$y_3 = y_4 = 0$ – 3-й и 4-й ресурсы не являются дефицитными.

Вывод. Двойственные оценки $Y = (y_1; y_2; \dots; y_m)$ есть цены ресурсов, при продаже которых производитель получит прибыль не менее той, какую бы он получил при производстве и сбыте готовой продукции:

$$L_{\max} = y_1 \cdot b_1 + y_2 \cdot b_2 + \dots + y_m \cdot b_m = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n.$$

В задаче по производству мороженого компании “Морозко”:

$$L_{\max} = 163,6 \cdot 400 + 72,7 \cdot 365 = 92\,000 \text{ (руб.)}.$$

Пример 1.9. Найти решение $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ задачи ЛП:

$$L(X) = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \text{ при ограничениях: } \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 53, \\ x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ x_j \geq 0, j=1;2. \end{cases}$$

Провести анализ устойчивости найденного решения.

☺ Решение.

С учётом исходной системы неравенств получаем область допустимых решений в I-й четверти (рис.1.33). Перемещаем линию уровня $L_0: x_1 + 4x_2 = \text{const}$ по направлению вектора $\bar{N}(1;4)$.

Точкой выхода L_0 из ОДР является точка $B = \ell_2 \cap \ell_3$:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 2, \\ 5x_1 + 4x_2 = 53. \end{cases} \Rightarrow B(5;7),$$

$$L_{\max} = L(B) = (x_1 + 4x_2)|_B = 5 + 4 \cdot 7 = 33.$$

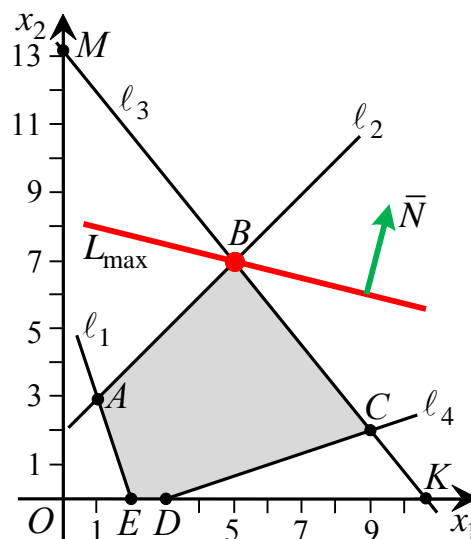


Рис.1.33

I. Изменение коэффициентов целевой функции

Линия уровня L_0 сохраняет положение оптимума в т. B, вращаясь вокруг неё между прямыми ℓ_2 и ℓ_3 .

$$\left. \begin{array}{l} \ell_2: -x_1 + x_2 = 2, \quad k_2 = 1 \\ \ell_3: 5x_1 + 4x_2 = 53, \quad k_3 = -\frac{5}{4} \end{array} \right| \Rightarrow -\frac{5}{4} \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq 1.$$

Опорная прямая в точке оптимума (рис.1.33) может быть горизонтальной ($c_1 = 0$), но не вертикальной ($c_2 \neq 0$). Чтобы точка $B(5;7)$ оставалась точкой максимума, необходимо потребовать, чтобы вектор $\bar{N} = \{c_1; c_2\}$ опорной прямой был направлен в правый верхний угол ($c_1 > 0, c_2 > 0$) или в левый верхний угол ($c_1 < 0$) координатной плоскости.

Таким образом, если коэффициенты c_1 и c_2 удовлетворяют условиям:

$$-1 \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{5}{4}, \quad c_2 > 0,$$

то максимум целевой функции будет достигаться в т. B . При этом, если прямая L_0 совпадёт с прямой ℓ_2 , то оптимальным решением будет любая точка отрезка AB ; если прямая L_0 совпадёт с прямой ℓ_3 , то оптимальным решением будет любая точка отрезка $[BC]$.

Найдём интервалы устойчивости коэффициентов целевой функции:

$c_1 = 1$	$c_2 = 4$
$\begin{cases} -1 \leq \frac{1}{c_2} \leq \frac{5}{4}, \\ c_2 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{c_2} \leq \frac{5}{4}, \\ c_2 > 0, \end{cases} \Rightarrow c_2 \geq \frac{4}{5}.$	$-1 \leq \frac{c_1}{4} \leq \frac{5}{4} \Rightarrow -4 \leq c_1 \leq 5.$
$L'(B) = \left(x_1 + \frac{4}{5}x_2\right)\Big _B =$ $= 5 + \frac{4}{5} \cdot 7 = \frac{53}{5}.$	$L'(B) = (-4x_1 + 4x_2)\Big _B =$ $= -4 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 8;$ $L''(B) = (5x_1 + 4x_2)\Big _B =$ $= 5 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 53.$
$L_{\max}(5;7) \in \left[\frac{53}{5}; +\infty\right),$ при $\begin{cases} c_1 = 1, \\ c_2 \geq \frac{4}{5}. \end{cases}$	$L_{\max}(5;7) \in [8;53],$ при $\begin{cases} -4 \leq c_1 \leq \frac{5}{4}, \\ c_2 = 4. \end{cases}$

II. Анализ изменений значений констант

в правой части неравенств ограничений

Активными являются 2-е и 3-е ограничения ОДР (т. к. оптимум определяется в т. $B = \ell_2 \cap \ell_3$), а 1-е и 4-е – пассивные. Т. е. значения $b_2 = 2$ и $b_3 = 53$ “дефицитны”, а $b_1 = 6$ и $b_4 = 3$ «имеются в избытке».

1. Проанализируем изменение текущего уровня дефицитного ресурса $b_2 = 2$. Граничную прямую ℓ_2 параллельно перемещаем, оставляя активным ограничение ℓ_3 . Точка B оптимума “плывёт” вдоль отрезка $[CM]$.

$C = \ell_3 \cap \ell_4:$ $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 53, \\ x_1 - 3x_2 = 3. \end{cases} \Rightarrow C(9; 2).$	$M = \ell_3 \cap Ox_2:$ $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 53, \\ x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow M\left(0; \frac{53}{4}\right).$
Подставим найденные координаты во второе неравенство системы: $b_2 = (-x_1 + x_2) _C = -9 + 2 = -7.$	Подставим найденные координаты во второе неравенство системы: $b_2 = (-x_1 + x_2) _M = -0 + \frac{53}{4} = \frac{53}{4}.$
$L(C) = (x_1 + 4x_2) _C = 9 + 4 \cdot 2 = 17.$	$L(M) = (x_1 + 4x_2) _M = 0 + 4 \cdot \frac{53}{4} = 53.$

Итак $\left[-7, \frac{53}{4}\right]$ – интервал устойчивости 2-го ресурса; $L_{\max} \in [17; 53]$.

$$-7 \leq b_2 + \Delta_2 \leq \frac{53}{4} \Rightarrow -7 \leq 2 + \Delta_2 \leq \frac{53}{4} \Rightarrow -9 \leq \Delta_2 \leq \frac{45}{4}.$$

Итак, текущий уровень запаса 2-го ресурса может быть уменьшен не более чем на 9 и увеличен не более чем на $\frac{45}{4}$. В этом случае гарантируется, что оптимальное решение будет достигаться в точке $B = \ell_2 \cap \ell_3$.

2. Проанализируем изменение дефицитного ресурса $b_3 = 53$. Граничную прямую ℓ_3 перемещаем параллельно самой себе, оставляя активным ограничение ℓ_2 . Точка B оптимального решения “плывёт” вдоль луча $[AB)$.

$A = \ell_2 \cap \ell_1: \begin{cases} 3 \cdot x_1 + x_2 = 6, \\ -x_1 + x_2 = 2. \end{cases} \Rightarrow A(1; 3).$	$+\infty$
Подставим найденные координаты в третье неравенство системы: $b_3 = (5x_1 + 4x_2) _A = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 17.$	Подставим найденные координаты в 3-е неравенство системы: $b_3 = (5x_1 + 4x_2) _{+\infty} = +\infty.$
$L(A) = (x_1 + 4x_2) _A = 1 + 4 \cdot 3 = 13.$	$L(+\infty) = (x_1 + 4x_2) _{+\infty} = +\infty.$

Итак $[17; +\infty)$ – интервал устойчивости 3-го ресурса; $L_{\max} \in [13; +\infty)$.

$$17 \leq b_3 + \Delta_3 \Rightarrow 17 \leq 53 + \Delta_3 \Rightarrow \Delta_3 \geq -36.$$

Итак, текущий уровень запаса 3-го ресурса может быть уменьшен не более чем на 36 ед., а увеличивать можно неограниченно. В этом случае гарантируется, что оптимум будет достигаться в точке $B = \ell_2 \cap \ell_3$.

3. Рассмотрим возможность изменений правой части пассивных ограничений системы – первого и четвертого.

Не изменяя оптимального решения, прямую ℓ_1 можно перемещать параллельно самой себе вверх до т. B и вниз до т. O .

$B(5;7)$	$O(0;0)$
Подставим координаты в 1-ое неравенство системы: $b_1 = (3x_1 + x_2) _B = 3 \cdot 5 + 7 = 22.$	Подставим координаты в 1-ое неравенство системы: $b_1 = (3x_1 + x_2) _O = 3 \cdot 0 + 0 = 0.$

$$0 \leq b_1 + \Delta_1 \leq 22 \Rightarrow 0 \leq 6 + \Delta_1 \leq 22 \Rightarrow -6 \leq \Delta_1 \leq 16.$$

Таким образом, при неизменном оптимальном решении:

$$L_{\max} = L(B) = (x_1 + 4x_2)|_{(5;7)} = 33$$

текущий уровень первого ресурса может быть уменьшен не более чем на 6 и увеличен не более чем на 16.

Вообще говоря, первый ресурс может быть уменьшен и более чем на 6 ед. В этом случае 1-е ограничение станет вырожденным (не будет играть никакой роли в системе ограничений исходной задачи ЛП).

4. Не изменяя оптимальное решение, прямую ℓ_4 можно параллельно перемещать вверх до т. B или вниз до пересечения с осью Ox_1 в т. K .

$B(5;7)$	$K\left(\frac{53}{5};0\right)$
Подставим координаты в 4-е неравенство системы: $b_4 = (x_1 - 3x_2) _B = 5 - 3 \cdot 7 = -16.$	Подставим координаты в 4-е неравенство системы: $b_4 = (x_1 - 3x_2) _K = \frac{53}{5} - 3 \cdot 0 = \frac{53}{5}.$

$$-16 \leq b_4 + \Delta_4 \leq \frac{53}{5} \Rightarrow -16 \leq 3 + \Delta_4 \leq \frac{53}{5} \Rightarrow -19 \leq \Delta_4 \leq \frac{38}{5}.$$

Таким образом, при неизменном оптимальном решении:

$$L_{\max} = L(B) = (x_1 + 4x_2)|_{(5;7)} = 33$$

текущий запас четвертого ресурса может быть уменьшен не более чем на 19 ед. и увеличен не более чем на $\frac{38}{5} = 7,6$ ед.

Вообще говоря, четвертый ресурс может быть увеличен и более чем на 7,6 ед. В этом случае 4-е ограничение станет вырожденным.

III. Стоимость ресурсов

Дефицитные ресурсы		Недефицитные ресурсы	
b_2	b_3	b_1	b_4
Интервал устойчивости			
$[-7; 53/4]$	$[17; +\infty)$	$(-\infty; 16]$	$[-19; +\infty)$
Оптимальное значение целевой функции			
$L_{\max} \in [17; 53]$	$L_{\max} \in [13; +\infty)$	$L_{\max} = L(B) = 33$	$L_{\max} = L(B) = 33$
Мера устойчивости (условная стоимость)			
$y_2 = \frac{53-17}{\frac{53}{4}+7} = \frac{16}{9}$	$y_3 = \frac{33-13}{53-17} = \frac{5}{9}$	$y_1 = 0$	$y_4 = 0$

Замечание. Т.к. интервал устойчивости 3-го ресурса $[17; +\infty)$ неограничен, то для того, чтобы найти оценку 3-го ресурса, возьмем отношение приращения оптимума целевой функции к приращению соответствующего изменения запаса 3-го ресурса для произвольного отрезка луча $[AB)$, определяющего его дефицитность, например отрезка $[AB]$.

Ответ: $X_{\max}(5; 7)$, $L_{\max} = 33$.

Имеем: $L_{\max} = L(5; 7)$ при $-1 \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{5}{4}$, $c_2 > 0$.

$L_{\max} = L(5; 7) \in \left[\frac{53}{5}; +\infty\right)$ при $c_1 = 1$, $c_2 \geq \frac{4}{5}$.

$L_{\max} = L(5; 7) \in [8; 53]$ при $-4 \leq c_1 \leq \frac{5}{4}$, $c_2 = 4$.

Интервалы устойчивости:

– активных запасов: $b_2 \in \left[-7; \frac{53}{4}\right]$, $L_{\max} \in [17; 53]$;
 $b_3 \in [17; +\infty)$, $L_{\max} \in [13; +\infty)$;
– пассивных запасов: $b_4 \in [-16; +\infty]$, $L_{\max} = L(5; 7) = 33$;
 $b_1 \in [-\infty; 22]$, $L_{\max} = L(5; 7) = 33$.

Стоимости ресурсов: $y_1 = 0$; $y_2 = \frac{16}{9}$; $y_3 = \frac{5}{9}$, $y_4 = 0$.



Определение. СЛУ называется *канонической*, если она является системой с базисом, где все свободные члены в правой части равенств неотрицательны: $b_i \geq 0, i = \overline{1, k}$.

Базисное неотрицательное решение канонической системы ограничений основной задачи ЛП соответствует угловой (опорной) точке многогранника решений исходной задачи.

Определение. *Опорное решение называется невырожденным, если число его ненулевых координат равно рангу системы, в противном случае оно – вырожденное.*

1.9. Теоретические основы алгебраического метода решения задач ЛП

Пусть дана система ограничений задачи ЛП:
$$\begin{cases} A X \geq B, \\ X \geq 0. \end{cases}$$

Тогда каждое решение неравенства системы ограничений определяет n -мерное полупространство с граничной гиперплоскостью

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i.$$

Полупространства (выпуклые множества), пересекаясь, образуют выпуклую область допустимых решений – многогранник. Координаты любой точки многогранника решений определяют допустимый план задачи ЛП.

Теорема 1.4. *Множество всех планов задачи ЛП является выпуклым.*

► По условию сформулирована задача ЛП: $L = C X \rightarrow \text{extr}, \begin{cases} A X = B, \\ X \geq 0. \end{cases}$

Пусть X_1, X_2 – планы задачи ЛП, т. е. по условию
$$\begin{cases} A \cdot X_1 = B, \\ A \cdot X_2 = B, \\ X_j \geq 0, j = 1, 2. \end{cases}$$

Составим выпуклую линейную комбинацию:
$$\begin{cases} X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_i \geq 0, i = 1, 2. \end{cases}$$

Для плана X проверим выполнение исходной системы ограничений:

$$\begin{aligned} A \cdot X &= A \cdot (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = A \cdot (\lambda_1 X_1) + A \cdot (\lambda_2 X_2) = \\ &= \lambda_1 \cdot (A \cdot X_1) + \lambda_2 \cdot (A \cdot X_2) = \lambda_1 \cdot B + \lambda_2 \cdot B = B \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) = B \cdot 1 = B, \end{aligned}$$

причём X состоит из неотрицательных компонент в силу неотрицательности значений λ_i и компонент планов X_1, X_2 . Следовательно, X также является планом исходной задачи ЛП.

Т.о. множество всех планов задачи ЛП по определению выпукло. ■

Теорема 1.5. (о существовании экстремума целевой функции в ограниченной области)

Если область допустимых решений, заданная системой ограничений задачи ЛП, замкнута и ограничена, то целевая функция достигает своего оптимума в угловой точке многогранника решений.

► Имеем задачу ЛП: $L = C \cdot X \rightarrow \min$, $\begin{cases} AX = B, \\ X \geq 0. \end{cases}$

Т. к. область допустимых решений, заданная системой ограничений задачи ЛП, замкнута и ограничена, то число угловых точек ОДР конечно.

Предположим, что оптимум функции достигается не в угловой точке X_0 , т. е. $L(X_0) \leq L(X_k)$ для любых угловых точек X_k ($k = 1, 2, \dots, p$).

Т. к. X_0 не угловая точка, то она представима в виде выпуклой линейной комбинации угловых точек многогранника решений:

$$\begin{cases} X_0 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_p X_p, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = 1, \\ \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p. \end{cases}$$

По свойствам линейной функции:

$$L(X_0) = \lambda_1 \cdot L(X_1) + \lambda_2 \cdot L(X_2) + \dots + \lambda_p \cdot L(X_p).$$

Из значений $L(X_i)$, где $i = \overline{1, p}$ выберем наименьшее значение $L(X_k)$.

Тогда

$$\begin{aligned} L(X_0) &\geq \lambda_1 \cdot L(X_k) + \lambda_2 \cdot L(X_k) + \dots + \lambda_p L(X_k) = L(X_k) \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p) = \\ &= L(X_k) \cdot 1 = L(X_k). \end{aligned}$$

Т. е. нашлась угловая точка X_k , в которой значение целевой функции $L(X_k)$ меньше, чем значение $L(X_0)$ – получили противоречие с нашим предположением. Следовательно, целевая функция достигает своего оптимума в угловой точке ОДР. ■

Теорема 1.6. (об альтернативном оптимуме целевой функции)

Если целевая функция достигает оптимума более чем в одной угловой точке многогранника решений, то она принимает это же значение в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек.

► Имеем задачу ЛП: $L = C \cdot X \rightarrow \min$, $\begin{cases} AX = B, \\ X \geq 0. \end{cases}$

Пусть целевая функция принимает минимальное значение в угловых точках X_1, X_2, \dots, X_k многогранника решений:

$$L_{\min} = L(X_1) = L(X_2) = \dots = L(X_k) = m.$$

Составим выпуклую линейную комбинацию X этих точек:

$$\begin{cases} X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_k X_k, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1, \\ \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{cases}$$

План X также является решением исходной задачи ЛП по теореме 1.4. По свойствам линейной функции:

$$\begin{aligned} L(X) &= \lambda_1 \cdot L(X_1) + \lambda_2 \cdot L(X_2) + \dots + \lambda_k \cdot L(X_k) = \\ &= \lambda_1 \cdot m + \lambda_2 \cdot m + \dots + \lambda_k \cdot m = m \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k) = m \cdot 1 = m = L_{\min}. \end{aligned}$$

Следовательно, план X , определённый как выпуклая линейная комбинация оптимальных планов многогранника решений, так же является оптимальным решением задачи минимума. ■

Теорема 1.7. (об экстремуме целевой функции в неограниченной области)

Если ОДР неограниченная область, то оптимальное решение существует и совпадает, по крайней мере, с одним из опорных решений в том и только в том случае, когда целевая функция ограничена сверху для задач на максимум или снизу для задач на минимум.

Теорема 1.8. (о соответствии угловых точек многогранника решений линейно независимым векторам системы ограничений)

Если в системе ограничений задачи ЛП:

$$\begin{cases} \bar{A}_1 \cdot x_1 + \bar{A}_2 \cdot x_2 + \dots + \bar{A}_n \cdot x_n = \bar{B}, \\ x_j \geq 0, \end{cases}$$

векторы $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_k$ (где $k \leq n$) линейно независимы, то набор $X = (x_1; x_2; \dots; x_k; 0; \dots; 0)$ является угловой точкой многогранника решений задачи ЛП.

► Пусть в системе ограничений исходной задачи векторы $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_k$ ($k \leq n$) линейно независимы.

Предположим, что план $X = (x_1; x_2; \dots; x_k; 0; \dots; 0)$ не является угловой точкой многогранника решений задачи ЛП. Следовательно, он представим в виде выпуклой линейной комбинации угловых точек X_1, X_2 ОДР:

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, \quad \lambda_i \in (0; 1).$$

Учитывая правила арифметических действий с матрицами, имеем:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_k \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ \dots \\ x_{1k} \\ x_{1,k+1} \\ \dots \\ x_{1n} \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} x_{21} \\ \dots \\ x_{2k} \\ x_{2,k+1} \\ \dots \\ x_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{21} \\ \dots \\ \lambda_1 x_{1k} + \lambda_2 x_{2k} \\ \lambda_1 x_{1,k+1} + \lambda_2 x_{2,k+1} \\ \dots \\ \lambda_1 x_{1n} + \lambda_2 x_{2n} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda_1 \cdot x_{11} + \lambda_2 \cdot x_{21}, \\ \dots \\ x_k = \lambda_1 \cdot x_{1k} + \lambda_2 \cdot x_{2k}, \\ 0 = \lambda_1 \cdot x_{1,k+1} + \lambda_2 \cdot x_{2,k+1}, \\ \dots \\ 0 = \lambda_1 \cdot x_{1n} + \lambda_2 \cdot x_{2n}. \end{cases}$$

Т.к. $\begin{cases} \lambda_i > 0, \\ x_{ij} \geq 0, \end{cases}$ то из последних равенств:

$$\begin{cases} x_{1,k+1} = 0, \\ x_{2,k+1} = 0, \\ \dots \\ x_{1n} = 0, \\ x_{2n} = 0. \end{cases}$$

Т.е. $X_1 = (x_{11}; x_{12}; \dots; x_{1k}; 0; \dots; 0)$, $X_2 = (x_{21}; x_{22}; \dots; x_{2k}; 0; \dots; 0)$.

Таким образом, планы X_1, X_2 – есть угловые точки многогранника решений. Следовательно, они удовлетворяют системе ограничений исходной задачи:

$$\begin{cases} A \cdot X_1 = B, \\ A \cdot X_2 = B, \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{A}_1 \cdot x_{11} + \bar{A}_2 \cdot x_{12} + \dots + \bar{A}_k \cdot x_{1k} + \bar{A}_{k+1} \cdot 0 + \dots + \bar{A}_n \cdot 0 = \bar{B}, \\ \bar{A}_1 \cdot x_{21} + \bar{A}_2 \cdot x_{22} + \dots + \bar{A}_k \cdot x_{2k} + \bar{A}_{k+1} \cdot 0 + \dots + \bar{A}_n \cdot 0 = \bar{B}, \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{A}_1 \cdot x_{11} + \bar{A}_2 \cdot x_{12} + \dots + \bar{A}_k \cdot x_{1k} = \bar{B}, \\ \bar{A}_1 \cdot x_{21} + \bar{A}_2 \cdot x_{22} + \dots + \bar{A}_k \cdot x_{2k} = \bar{B}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{A}_1 \cdot (x_{11} - x_{21}) + \bar{A}_2 \cdot (x_{12} - x_{22}) + \dots + \bar{A}_k \cdot (x_{1k} - x_{2k}) = \bar{0}.$$

Т. к. по условию теоремы векторы $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_k$ линейно независимы, то по определению получаем:

$$\begin{cases} x_{11} - x_{21} = 0, \\ x_{12} - x_{22} = 0, \\ \dots \\ x_{1k} - x_{2k} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{11} = x_{21}, \\ x_{12} = x_{22}, \\ \dots \\ x_{1k} = x_{2k}. \end{cases} \Rightarrow X_1 = X_2.$$

Т.е. отрезок $[X_1; X_2]$ является вырожденным и состоит из одной точки. Следовательно, наше предположение неверно, т.е. X является угловой точкой многогранника ОДР. ■

Теорема 1.9. (о соответствии линейно независимых векторов системы ограничений угловым точкам многогранника решений)

Если $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ – угловая точка многогранника решений задачи ЛП, то векторы в системе ограничений:

$$\begin{cases} \bar{A}_1 x_1 + \bar{A}_2 x_2 + \dots + \bar{A}_n x_n = \bar{B}, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \end{cases}$$

соответствующие положительным координатам x_j угловой точки многогранника решений, являются линейно независимыми.

► Имеем задачу ЛП: $L = \bar{C} \cdot \bar{X}$, $\begin{cases} \bar{A}_1 x_1 + \bar{A}_2 x_2 + \dots + \bar{A}_n x_n = \bar{B}, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$

Пусть $X = (x_1; x_2; \dots; x_n) = (x_1; x_2; \dots; x_n; 0; \dots; 0)$ – угловая точка многогранника решений задачи ЛП с положительными компонентами, т. е. план, удовлетворяющий системе ограничений:

$$\begin{cases} AX = B \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{A}_1 x_1 + \bar{A}_2 x_2 + \dots + \bar{A}_k x_k + \bar{A}_{k+1} \cdot 0 + \dots + \bar{A}_n \cdot 0 = \bar{B}, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{A}_1 x_1 + \bar{A}_2 x_2 + \dots + \bar{A}_k x_k = \bar{B}. \quad (1.11)$$

Предположим, что векторы $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_k$ ($k \leq n$) линейно зависимы, т. е.

$$(\exists \lambda_i \neq 0): \quad \bar{A}_1 \cdot \lambda_1 + \bar{A}_2 \cdot \lambda_2 + \dots + \bar{A}_k \cdot \lambda_k = \bar{0}. \quad (1.12)$$

Возьмём произвольное число $t > 0$ и выполним следующие арифметические операции: $(1.11) + t \cdot (1.12)$ и $(1.11) - t \cdot (1.12)$:

$$\begin{cases} \bar{A}_1 \cdot (x_1 + t \cdot \lambda_1) + \bar{A}_2 \cdot (x_2 + t \cdot \lambda_2) + \dots + \bar{A}_k \cdot (x_k + t \cdot \lambda_k) = \bar{B}, \\ \bar{A}_1 \cdot (x_1 - t \cdot \lambda_1) + \bar{A}_2 \cdot (x_2 - t \cdot \lambda_2) + \dots + \bar{A}_k \cdot (x_k - t \cdot \lambda_k) = \bar{B}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Можно выбрать произвольное число $t > 0$ таким образом, чтобы компоненты $x_j - t \cdot \lambda_j$ ($j = \overline{1, k}$) были неотрицательны. Тогда, с учётом (1.13):

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 + t \cdot \lambda_1 \\ \dots\dots\dots \\ x_k + t \cdot \lambda_k \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_1 - t \cdot \lambda_1 \\ \dots\dots\dots \\ x_k - t \cdot \lambda_k \end{pmatrix} - \text{планы задачи ЛП.}$$

При этом исходный план X можно представить в виде линейной комбинации $X = \frac{1}{2} \cdot X_1 + \frac{1}{2} \cdot X_2$, тем самым получаем противоречие с тем, что X – угловая точка.

Следовательно, векторы $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_k$ линейно независимы. ■

Вывод. Целевая функция задачи ЛП достигает оптимума в угловой точке многогранника решений (опорный план), которая определяется системой ЛНЗ векторов, содержащихся в системе ограничений задачи ЛП.

Т.о., найдя все угловые точки многогранника решений (опорные планы) и выбрав наибольшее (наименьшее) значение из значений целевой функции в них, можно найти решение задачи ЛП.

В алгебраическом представлении кандидаты на оптимальное решение (т. е. угловые точки в графическом представлении) определяются из системы линейных уравнений следующим образом. Пусть $m < n$ (это условие выполняется для большинства задач ЛП), тогда полагаем $n - m$ переменных равными нулю (свободными) и решаем систему из m уравнений относительно оставшихся m переменных (базисных); если решение этой системы единственно, то оно соответствует угловой точке пространства решений.

Пример 1.10. Найти решение задачи ЛП:

$$L(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \text{ при ограничениях } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2. \end{cases}$$

☺ Решение. На рис. 1.34 показано графическое решение этой задачи.

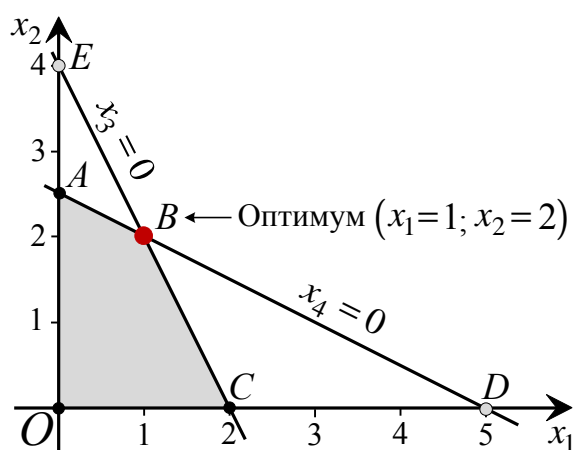


Рис. 1.34

Преобразуем систему ограничений-неравенств в систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Здесь имеем систему из $m = 2$ уравнений для $n = 4$ переменных. Согласно сформулированному выше правилу угловые точки можно определить алгебраически, присвоив $n - m = 2$ переменным нулевые значения и решив затем систему уравнений относительно оставшихся $m = 2$ переменных. Если, например, положить $x_1 = x_2 = 0$, то решение системы будет $x_3 = 4$ и $x_4 = 5$. Это решение соответствует точке O на рис. 1.34.

Другую угловую точку можно определить, если положить, например, $x_3 = x_4 = 0$. В этом случае надо найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Решением будет $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, что соответствует точке B (рис. 1.34).

Возникает вопрос, как определить, какие $(n - m)$ переменные положить равными нулю, чтобы получить угловую точку? Без графического представления области допустимых решений (что возможно только для задач с одной, двумя и тремя переменными) нельзя сказать, какие $(n - m)$ нулевые переменные соответствуют той или иной угловой точке. Однако это не мешает перечислить все угловые точки ОДР. Для этого надо просто рассмотреть все комбинации $(n - m)$ переменных, приравняв их к нулю и затем найти решение полученной системы уравнений. Оптимальное ре-

шение, которое доставляет наилучшее значение целевой функции, будет среди *допустимых* угловых точек.

В нашем примере имеем $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ угловых точек. Но, глядя на

рис. 1.34, можно увидеть только 4 угловые точки O , A , B и C . Где “спрятались” ещё две точки? В действительности точки D и E также являются угловыми, но это *недопустимые* угловые точки, поскольку не удовлетворяют всем ограничениям задачи (не принадлежат ОДР – четырёхугольнику $OABC$). Такие недопустимые угловые точки не рассматриваются как кандидаты на оптимальное решение.

В табл. 1.2 перечислены все возможные ситуации данного примера.

Таблица 1.2

Небазисные (нулевые) переменные	Базисные переменные	Базисные решения	Соответствующие угловые точки	Допустимо ли решение?	Значение целевой функции $L(X)$
$(x_1; x_2)$	$(x_3; x_4)$	$(0; 0; 4; 5)$	$O (0; 0)$	Да	0
$(x_1; x_3)$	$(x_2; x_4)$	$(0; 4; 0; -3)$	$E (0; 4)$	Нет	–
$(x_1; x_4)$	$(x_2; x_3)$	$(0; 2, 5; 1, 5; 0)$	$A (0; 2, 5)$	Да	7,5
$(x_2; x_3)$	$(x_1; x_4)$	$(2; 0; 0; 3)$	$C (2; 0)$	Да	4
$(x_2; x_4)$	$(x_1; x_3)$	$(5; 0; -6; 0)$	$D (5; 0)$	Нет	–
$(x_3; x_4)$	$(x_1; x_2)$	$(1; 2; 0; 0)$	$B (1; 2)$	Да	8 (оптимум)

Замечание. При возрастании размера задачи (увеличении значений n и m) процесс перечисления всех угловых точек становится отдельной чрезвычайно сложной задачей. Например, при $m = 13$ и $n = 20$, когда необходимо решить $C_{20}^{13} = \frac{20!}{13! \cdot 7!} = 77\,520$ систем уравнений порядка 13×13 ,

получаем громоздкую, в вычислительном отношении, задачу. Здесь следует учесть, что задачи ЛП размерности 13×20 считаются небольшими – реальные задачи могут иметь сотни и даже тысячи переменных и ограничений. Симплекс-метод в значительной степени снимает эту проблему, поскольку он рассматривает не все возможные базисные решения (т. е. угловые точки пространства допустимых решений), а только часть всех допустимых базисных решений.

1.10. Симплекс-метод для решения задач ЛП

Идеи, лежащие в основе графического метода решения задач ЛП, являются основой и алгебраического симплекс-метода. На рис. 1.35 показаны параллели между этими двумя методами.



Рис. 1.35.

В графическом методе ОДР определяется как пересечение полуплоскостей, определяемых неравенствами системы ограничений. В симплекс-методе пространство решений задают система из m линейных уравнений и n неотрицательных переменных. Симплексный метод является универсальным, так как позволяет решить любую задачу ЛП, заданную в каноническом виде. Идея симплексного метода – метода последовательного улучшения плана заключается в том, что, начиная с некоторого исходного опорного решения, осуществляется последовательно направленное перемещение по опорным решениям задачи к оптимальному. Для задач на максимум значение целевой функции при этом перемещении не убывает (на минимум – не возрастает). Поскольку число опорных решений (количество угловых точек) конечно, то через конечное количество шагов (итераций) получим оптимальное опорное решение.

1.11. Итерационная природа симплекс-метода и его геометрическая интерпретация

Вернёмся к области допустимых решений задачи 1.10. (рис. 1.36).

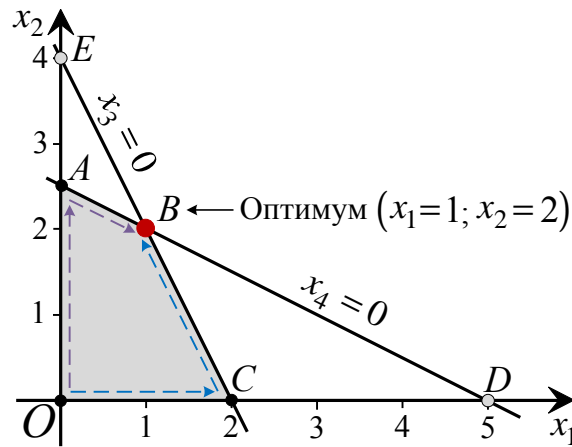


Рис. 1.36.

Обычно алгоритм симплекс-метода начинается с точки O , где $x_1 = x_2 = 0$. В этой точке значение целевой функции $L(X)$ равно нулю. По условию задачи необходимо найти максимум функции $L(X) = 2x_1 + 3x_2$. Очевидно, что если переменная x_1 или переменная x_2 , или обе сразу примут положительные значения, то это приведёт к увеличению значения целевой функции.

Изменяя значения координат x_1 и x_2 , мы будем осуществлять переход от одной точки ОДР к другой. Переход можно осуществлять только вдоль границы ОДР. Внутренние точки, например отрезка $[OB]$, неприемлемы, поскольку кандидатом на оптимальное решение может быть только угловая точка (рис.1.36). Итак, из начальной угловой точки O можно перейти в угловую точку C или в угловую точку A .

1. Если осуществить переход из точки O в точку C , то значение x_1 увеличится. Далее из точки C возможен переход только в угловую точку B , для которой обе координаты x_1 и x_2 положительны. Так как точка B соответствует оптимальному решению, то на этом вычисления заканчиваются. Таким образом, алгоритм симплекс-метода создаёт путь $O \rightarrow C \rightarrow B$.

2. Если сначала увеличивать значение x_2 , то следующей угловой точкой будет точка A , из которой процесс решения переходит в оптимальную точку B . В этом случае алгоритм симплекс-метода создаёт путь $O \rightarrow A \rightarrow B$.

Может возникнуть вопрос: существует ли правило, в соответствии с которым можно было бы определить выбор пути? Алгоритм симплекс-метода предлагает простое правило выбора переменных и на каждом шаге допускает замену только одной базисной переменной на свободную. По-

сколько здесь мы рассматриваем задачу максимизации, то следует выбирать такую свободную переменную, которая имеет наибольший положительный коэффициент в выражении целевой функции. Если таких переменных несколько, то выбор произвольный. Необходимо понимать, что это эмпирическое правило, сформулированное на основе многочисленных компьютерных вычислений симплекс-метода. В большинстве случаев, но не обязательно всегда, применение этого правила ведёт к наименьшему числу шагов, затрачиваемых на поиск оптимального решения.

Для нашего примера опишем перевод свободных (небазисных) переменных в базисные и наоборот при переходе от одной угловой точки к следующей. На рис.1.37 показано, что в точке O переменные x_3 и x_4 являются базисными, а переменные x_1 и x_2 – свободными.

При переходе из точки O в точку C переменная x_1 принимает положительное значение. То есть изменяется состояние переменной x_1 из небазисной в базисную. Одновременно переменная x_3 , которая была базисной в точке O , становится свободной и принимает нулевое значение в точке C . Таким образом, в точке C мы имеем новый набор базисных переменных (x_1, x_4) и свободных переменных (x_3, x_2) . Здесь существенно то, что происходит одновременный “обмен состояниями” между свободной переменной x_1 и базисной переменной x_3 .

Угловые точки	Свободные переменные (= 0)	Базисные переменные (≠ 0)
O ↓	<div> <div>вводится в базис</div> <div> $(x_1; x_2)$ </div> <div>выводится из базиса</div> </div>	<div> <div> $(x_3; x_4)$ </div> </div>
C ↓	<div> <div>вводится в базис</div> <div> $(x_3; x_2)$ </div> <div>выводится из базиса</div> </div>	<div> <div> $(x_1; x_4)$ </div> </div>
B	$(x_3; x_4)$	$(x_1; x_2)$ Оптимум

Рис. 1.37.

В точке B переменная x_2 вводится в базисное решение, а переменная x_4 – выводится. Поскольку в точке B найдено оптимальное решение, то процесс изменения состояний переменных заканчивается.

1.12. Критерий оптимальности

Пусть в задаче ЛП $L = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$ система ограничений представлена в каноническом виде с базисом $\{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_k\}$, $k \leq n$:

Тогда опорный план и соответствующее значение целевой функции определяются следующим образом:

$$X_0 = (b_1; b_2; \dots; b_k; 0; \dots; 0), \quad L(X_0) = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_k b_k.$$

Общее же решение задачи будет представлено системой:

Подставим это решение в целевую функцию:

$$\begin{aligned} L(X) &= c_1 \cdot (b_1 - a_{1,k+1}x_{k+1} - \dots - a_{1n}x_n) + c_2 \cdot (b_2 - a_{2,k+1}x_{k+1} - \dots - a_{2n}x_n) + \dots \\ &\quad \dots + c_k \cdot (b_k - a_{k,k+1}x_{k+1} - \dots - a_{kn}x_n) + c_{k+1}x_{k+1} + \dots + c_nx_n = \\ &= c_1b_1 + c_2b_2 + \dots + c_kb_k - (c_1a_{1,k+1} + c_2a_{2,k+1} + \dots + c_ka_{k,k+1} - c_{k+1})x_{k+1} - \\ &\quad -(c_1a_{1,k+2} + c_2a_{2,k+2} + \dots + c_ka_{k,k+2} - c_{k+2})x_{k+2} - \dots \\ &\quad \dots - (c_1a_{1n} + c_2a_{2n} + \dots + c_ka_{k,n} - c_n)x_n. \end{aligned}$$

Определение. Коэффициенты $\sum_{i=1}^k c_i \cdot a_{i,j} - c_j = L_j - c_j$ при неизвестных

x_j (где $j = k + 1, \dots, n$) обозначим через Δ_j и назовём их *оценками свободных переменных*.

Тогда целевая функция примет вид:

$$L(X) = L(X_0) - \Delta_{k+1} \cdot x_{k+1} - \Delta_{k+2} \cdot x_{k+2} - \dots - \Delta_n \cdot x_n. \quad (1.15)$$

Из чего следует, что если для задачи на максимум все $\Delta_j \geq 0$, то найденное решение X_0 является оптимальным, и его улучшить нельзя. Но если хотя бы одно значение $\Delta_j < 0$, то решение можно улучшить, если одну из базисных переменных заменить той, для которой $\Delta_j < 0$.

Критерий оптимальности задачи максимизации

Если для всех векторов канонической системы ограничений задачи ЛП выполняется условие $\Delta_j = L_j - c_j \geq 0$ (где $j = \overline{1, n}$), то полученный допустимый план является оптимальным для задачи максимизации, т. к. согласно равенству (1.15) будет справедливо: $L(X) < L(X_0)$.

Критерий оптимальности задачи минимизации

Если для всех векторов канонической системы ограничений задачи ЛП выполняется условие $\Delta_j = L_j - c_j \leq 0$ (где $j = \overline{1, n}$), то полученный допустимый план является оптимальным для задачи минимизации, т. к. согласно равенству (1.15) будет справедливо: $L(X) > L(X_0)$.

1.13. Наличие отрицательного b_i при преобразовании системы ограничений в канонический вид

Симплексным методом можно решать задачи только канонического вида. Если система ограничений имеет неканонический вид, её нужно привести к таковому следующим образом:

1. ввести балансовые переменные в ограничения-неравенства;
2. выделить базис;
3. проверить неотрицательность свободных значений в правых частях полученных равенств.

Рассмотрим ситуации, когда при выделении базиса в расширенной матрице основной системы ограничений задачи ЛП возникают отрицательные свободные числа.

✓ В строке с отрицательным b_i нет отрицательных a_{ij} .

По условию $x_j \geq 0$. Тогда сумма неотрицательных слагаемых $a_{ij}x_j$ не может быть равной отрицательному числу b_i . Т. е. система ограничений образует ОДР – пустое множество.

Следовательно, задача ЛП решений не имеет.

- ✓ В столбце \bar{B} есть одно отрицательное значение b_i и в соответствующей строке есть один отрицательный элемент a_{ij} .

В базис вводится вектор \bar{A}_j , имеющий отрицательный i -й элемент a_{ij} в строке отрицательного b_i . Элемент a_{ij} определяет разрешающий элемент.

Например, для приведённой ниже матрицы $b_2 = -6 < 0$. В базис вводим вектор \bar{A}_1 , так как только его координата во 2-й строке $a_{21} < 0$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ \textcircled{-2} & 2 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 6 & -4 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array} \right) : (-2) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ \textcircled{1} & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 3 \\ 6 & -4 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array} \right) \sim$$

Выполним дальнейшие элементарные преобразования строк с помощью разрешающего элемента $\tilde{a}_{21} = 1$:

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

- ✓ В столбце \bar{B} есть одно отрицательное значение b_i , а в соответствующей строке есть несколько отрицательных элементов a_{ij} .

Для выбора вектора \bar{A}_j с отрицательной i -й координатой a_{ij} в строке отрицательного b_i , который необходимо ввести в базис, выполняют следующие действия:

- для каждого вектора \bar{A}_j ($j = \overline{1, k}$), имеющего отрицательную координату a_{ij} в строке отрицательного b_i , вычисляют положительную оценку $Q_j = \min_j \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\}$ и находят значение $\lambda_j = Q_j \cdot (-c_j)$;
- для задачи максимизации выбирают наименьшее λ_j , для задачи минимизации наибольшее λ_j . Индекс j определяет вектор, который необходимо ввести в базис. Отрицательный элемент a_{ij} выбранного вектора определяет разрешающий элемент.

Например, для задачи ЛП: $L = -2x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$ система ограничений имеет расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array} \right),$$

для которой $b_2 = -6 < 0$.

В базис можно ввести или вектор \bar{A}_1 , или вектор \bar{A}_2 , т. к. их координаты во 2-й строке отрицательные. Вычислим оценки:

$$\square \text{ для вектора } \bar{A}_1: Q_1 = \min \left\{ \frac{4}{1}; \frac{-6}{-2} \right\} = 3, \quad \lambda_1 = Q_1 \cdot (-c_1) = 3 \cdot 2 = 6;$$

$$\square \text{ для вектора } \bar{A}_2: Q_2 = \min \left\{ \frac{4}{1}; \frac{-6}{-1} \right\} = 4, \quad \lambda_2 = Q_2 \cdot (-c_2) = 4 \cdot 2 = 8.$$

Для исходной задачи максимизации выбираем меньшее λ_i :

$$\min \{ \lambda_1; \lambda_2 \} = \min \{ 6; 8 \} = 6 = \lambda_1.$$

Следовательно, в базис вводим вектор \bar{A}_1 . Разделим 2-ю строку на элемент $a_{21} = -2$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ \textcircled{-2} & -1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ \textcircled{1} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array} \right) \sim$$

Выполним дальнейшие элементарные преобразования строк с помощью разрешающего элемента $\tilde{a}_{21} = 1$:

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 1 & 38 \end{array} \right).$$

✓ В столбце \bar{B} есть несколько отрицательных значений b_i .

Для отрицательных b_i вычисляем положительную оценку

$$\mu_{ij} = \max \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\}.$$

Индекс j для μ_{ij} определяет вводимый в базис вектор \bar{A}_j и разрешающий элемент a_{ij} , с помощью которого проводят дальнейшие элементарные преобразования строк.

Например, для приведённой ниже матрицы

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array} \right)$$

вычисляем положительные оценки для отрицательных значений b_1 и b_2 :

$$\mu_{ij} = \max \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\} = \max \left\{ \frac{-4}{-3}; \frac{-6}{-2}; \frac{-6}{-1} \right\} = 6 = \frac{b_2}{a_{22}} = \mu_{22}.$$

Следовательно, в базис вводим вектор \bar{A}_2 с разрешающим элементом a_{22} . Разделим 2-ю строку на $a_{22} = -1$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ \textcircled{-2} & -1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & \textcircled{1} & 0 & -1 & 0 & 6 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array} \right) \sim$$

Выполним дальнейшие элементарные преобразования строк с помощью разрешающего элемента $\tilde{a}_{22} = 1$:

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 0 & 1 & -3 & 0 & 14 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array} \right).$$

1.14. Алгоритм симплекс-метода для канонической задачи ЛП

Для удобства вычислений симплексным методом составляют симплексные таблицы. В отличие от таблиц метода Жордана-Гаусса (табл. 1.1) в них добавляют две строки (сверху и снизу) и два столбца (слева и справа). В верхней строке указывают все коэффициенты c_j целевой функции при переменных, в нижней строке – оценки Δ_j . В левом столбце указывают коэффициенты c_i целевой функции при базисных переменных (БП), в правом столбце вычисляют положительные отношения $Q = \frac{b_i}{a_{ij}}$.

Шаг 1. Все строки таблицы **начальной итерации** (за исключением Δ -строки) заполняем по данным канонической системы ограничений и целевой функции (табл. 1.3). Находим начальное опорное решение $X_0 = (b_1; b_2; \dots; b_k; 0; \dots; 0)$.

Таблица 1.3

$c_j \backslash c_i$	БП	c_1	c_2	...	c_r	c_{r+1}	...	c_n	$L(X)$	$Q = \frac{b_i}{a_{ij}} > 0$
		x_1	x_2	...	x_r	x_{r+1}	...	x_n	b_i	
c_1	x_1	1	0	...	0	$a_{1,r+1}$...	a_{1n}	b_1	
c_2	x_2	0	1	...	0	$a_{2,r+1}$...	a_{2n}	b_2	
...	
c_r	x_r	0	0	...	1	$a_{r,r+1}$...	a_{rn}	b_r	
Δ_j		0	0	...	0	Δ_{r+1}	...	Δ_n	$L(X_1)$	

Шаг 2. Опорное решение **проверяем на оптимальность**, вычисляя значения для Δ -строки (табл. 1.3):

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^r c_i a_{ij} - c_j, \quad j = \overline{1, n}; \quad L = \sum_{i=1}^r c_i b_i.$$

Делаем **ВЫВОД**:

Δ-критерий оптимальности выполнен		
$L \rightarrow \max$	все оценки $\Delta_j \geq 0$	Значение оптимума целевой функции можно получить, скалярно перемножая вектор-столбец цен базисных векторов на вектор-столбец плана: $L_{\text{extr}} = \sum_{i=1}^r c_i \cdot b_i$
$L \rightarrow \min$	все оценки $\Delta_j \leq 0$	

Δ-критерий оптимальности не выполнен		
$L \rightarrow \max$	В столбце, для которого $\Delta_j \leq 0$, нет ни одного положительного элемента a_{ij}	Целевая функция не ограничена для поиска оптимума. Т. е. задача ЛП не имеет решения
$L \rightarrow \min$	В столбце, для которого $\Delta_j \geq 0$, нет ни одного положительного элемента a_{ij}	

Δ-критерий оптимальности не выполнен		
$L \rightarrow \max$	В столбце, для которого $\Delta_j \leq 0$, есть положительный элемент a_{kj}	Необходимо изменить набор базисных векторов, т. е. перейти к следующей итерации симплекс таблицы (шаг 3)
$L \rightarrow \min$	В столбце, для которого $\Delta_j \leq 0$, есть положительный элемент a_{kj}	

Шаг 3.

1) Выбор разрешающего столбца.

$L \rightarrow \max$	$L \rightarrow \min$
Если одна оценка $\Delta_j \leq 0$, то в столбец БП вводят переменную x_j .	Если одна оценка $\Delta_j \geq 0$, то в столбец БП вводят переменную x_j .
Если несколько $\Delta_j \leq 0$, то в столбец БП вводят ту переменную, которой соответствует наименьшая по величине отрицательная Δ -оценка.	Если несколько $\Delta_j \geq 0$, то в столбец БП вводят ту переменную, которой соответствует наибольшая по величине Δ -оценка.
Если несколько векторов имеют одну и ту же наименьшую отрицательную Δ -оценку, то в базис включают переменную, которой соответствует бóльшая цена.	Если несколько векторов имеют одну и ту же наибольшую положительную Δ -оценку, то в базис включают переменную, которой соответствует мёньшая цена.

2) Для выбранного разрешающего столбца координат вектора \bar{A}_j **вычисляют** $Q = \frac{b_i}{a_{ij}} > 0$. За **разрешающую строку** выбираем ту, которой соответствует наименьшее положительное отношение Q .

3) Элемент, находящийся на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, называют **разрешающим элементом**.

Шаг 4. Составляют **новую итерацию** с изменённым базисом:

- переписываем разрешающую строку, разделив её на разрешающий элемент;
- заполняем базисные столбцы;
- остальные коэффициенты таблицы находим по правилу “прямоугольника”. Получаем новое опорное решение.

Шаг 5. Возвращаемся к **шагу 2** алгоритма.

Правило “прямоугольника”

Пусть разрешающим элементом является элемент s -й строки и k -го столбца. Тогда элемент i -й строки j -го столбца следующего шага \tilde{a}_{ij} по правилу “прямоугольника” определяется формулой

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{sk} - a_{sj} \cdot a_{ik}}{a_{sk}},$$

где a_{ij} , a_{sk} , a_{sj} , a_{ik} – элементы предыдущего шага.

Схема вычисления элемента \tilde{a}_{ij} представлена на рис. 1.38.

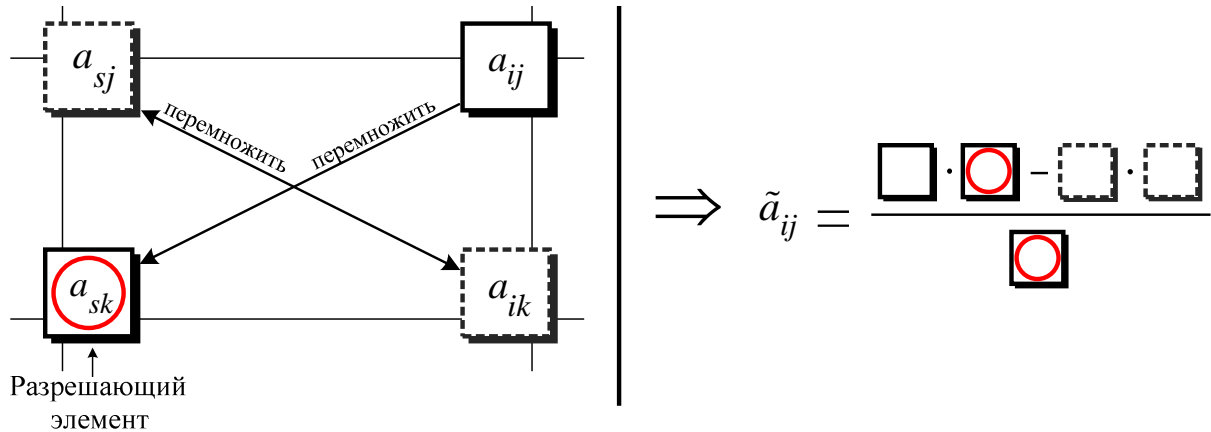


Рис. 1.38.

Замечание. Вместо правила “прямоугольника” в симплексных таблицах можно использовать более привычные преобразования Жордана-Гаусса.

Далее рассмотрим примеры, иллюстрирующие те или иные ситуации, возникающие при решении задач ЛП симплекс-методом.

1.15.1. Единственность оптимального решения

Если среди оценок Δ_j оптимального плана **равны нулю только оценки базисных переменных**, то полученное решение является единственным. Геометрически это соответствует случаю, когда линия уровня целевой функции является опорной прямой в точке оптимума ОДР (рис. 1.13).

Вернёмся к **примеру 1.10**. Найти решение задачи ЛП:

$$L(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \text{ при ограничениях } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2. \end{cases}$$

☺ Решение.

Шаг 0 симплекс-метода. Приведём систему ограничений исходной задачи ЛП к основному виду. Для этого добавим к каждому неравенству соответствующую балансовую переменную. Получим:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Поскольку расширенная матрица полученной системы уравнений имеет канонический вид

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right), \quad \text{единичный базис}$$

то в качестве базисных переменных выбираем x_3 и x_4 , тогда x_1 и x_2 – свободные переменные.

Шаг 1 симплекс-метода. Составим симплекс-таблицу (табл. 1.4).

Таблица 1.4

c_j	БП	2	3	0	0	$L(X)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
c_i		x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	
0	x_3	2	1	1	0	4	$\frac{4}{1} = 4$
0	x_4	1	2	0	1	5	$\frac{5}{2} = 2,5 - \min$
$\Delta_j \geq 0$		-2	-3	0	0	0	Критерий на max не выполнен

Шаг 2 симплекс-метода. Поясним способ вычисления значений в последней индексной Δ -строке.

Вектор-столбец цен c_i базисных векторов скалярно умножаем на вектор \bar{A}_j и вычитаем соответствующую цену c_j :

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} - c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = (0 \cdot 2 + 0 \cdot 1) - 2 = -2;$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} - c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 2) - 3 = -3;$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} - c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 0 = 0;$$

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix} - c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0.$$

Замечание. Т.к. x_3 и x_4 – базисные переменные, то справедливо, что соответствующие значения $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 = 0$.

Значение целевой функции найдём как скалярное произведение вектор-столбца цен c_i базисных векторов и вектор-столбца \bar{B} :

$$L = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 5 = 0.$$

Получим исходное опорное решение:

$$X_0 = (0; 0; 4; 5), \quad L(X_0) = 0.$$

В Δ -строке две отрицательные оценки: $\Delta_1 = -2$, $\Delta_2 = -3$ (табл. 1.4). Значит, найденное решение не является оптимальным для задачи максимизации и его можно улучшить.

Шаг 3 симплекс-метода. В качестве разрешающего столбца следует принять столбец переменной x_2 , так как отрицательная оценка Δ_2 – наименьшая (наибольшая по модулю); а за разрешающую строку – строку переменной x_4 , так как $\min Q_i = \min\{4; 2,5\} = 2,5$. Таким образом, разрешающим является элемент $a_{22} = 2$ (табл. 1.4').

Таблица 1.4'

c_j	БП	2	3	0	0	$L(X)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
c_i		x_1	$\uparrow x_2$	x_3	x_4	b_i	
0	x_3	2	1	1	0	4	$\frac{4}{1} = 4$
0	$\leftarrow x_4$	1	2	0	1	5	$\frac{5}{2} = 2,5 - \min$
$\Delta_j \geq 0$		-2	-3	0	0	0	Критерий на max не выполнен

Шаг 4 симплекс-метода. Вводим в столбец БП переменную x_2 , выводим x_4 . Элементы базисного столбца при переменной x_3 не изменяются, вектор-столбец \bar{A}_2 при переменной x_2 становится базисным. Все элементы разрешающей строки разделим на разрешающий элемент (табл. 1.5).

Таблица 1.5

c_j	БП	2	3	0	0	$L(X)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
c_i		x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	
0	x_3	...	0	1	—
3	x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	—

Остальные элементы рассчитываем по правилу “прямоугольника”:

$$\tilde{a}_{11} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}{a_{22}} = \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$\tilde{a}_{14} = \frac{a_{14} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{24}}{a_{22}} = \frac{0 \cdot 2 - 1 \cdot 1}{2} = -\frac{1}{2};$$

$$\tilde{b}_1 = \frac{b_1 \cdot a_{22} - a_{12} \cdot b_2}{a_{22}} = \frac{4 \cdot 2 - 1 \cdot 5}{2} = \frac{3}{2}.$$

Симплексная таблица примет вид, представленный в табл. 1.6.

Таблица 1.6

c_j	БП	2	3	0	0	$L(X)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
c_i		x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	
0	x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	—
3	x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	—
$\Delta_j \geq 0$		$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{2}$	Критерий на max не выполнен

Из табл. 1.6 находим:

$$X_1 = \left(0; \frac{5}{2}; \frac{3}{2}; 0 \right), \quad L(X_1) = \frac{15}{2}.$$

Шаг 5(2) симплекс-метода. Вычисляем значения в Δ -строке:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} - c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - 2 = \left(0 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} \right) - 2 = -\frac{1}{2};$$

$\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$ – как оценки базисных переменных;

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix} - c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - 0 = \left[0 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + 3 \cdot \frac{1}{2} \right] - 0 = \frac{3}{2}.$$

Критерий оптимальности для данной задачи на максимум ещё не выполнен, т. к. $\Delta_1 < 0$. Столбец переменной x_1 – разрешающий. Вычисляем значения Q (табл. 1.7). Так как $\min Q_i = \min \{1; 5\} = 1$, то разрешающая строка – строка переменной x_3 . Таким образом, разрешающим является элемент $a_{11} = \frac{3}{2}$.

Таблица 1. 7

c_j \ c_i	БП	2	3	0	0	$L(X)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
		$\uparrow x_1$	x_2	x_3	x_4	b_i	
0	$\leftarrow x_3$	$\left(\frac{3}{2}\right)$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} : \frac{3}{2} = 1 - \min$
3	x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2} : \frac{1}{2} = 5$
$\Delta_j \geq 0$		$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{2}$	Критерий на max не выполнен

Составляем следующую симплексную таблицу 1.8.

Таблица 1. 8

c_j \ c_i	БП	2	3	0	0	$L(X)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
		x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	
2	x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	—
3	x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2	—
$\Delta_j \geq 0$		0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	8	Критерий на max выполнен

Из табл. 1.8 находим:

$$X_2 = (1; 2; 0; 0), \quad L(X_2) = 8.$$

При этом все оценки $\Delta_j \geq 0$. Следовательно, найденное опорное решение является оптимальным планом задачи:

$$X_{\text{опт}} = X_2 = (1; 2; 0; 0), \quad L_{\text{опт}} = L(X_2) = 8.$$

Ранее это решение было получено графически – плану $X_{\text{опт}}$ соответствует точка $B(1; 2)$ (рис.1.34). ☺

1.15.2. Бесконечное множество решений (альтернативный оптимум)

Если среди индексных оценок Δ_j оптимального плана **равны нулю оценки не только базисных векторов**, то полученный оптимальный план $X_{1\text{опт}}$ не является единственным. Чтобы найти остальные базисные решения $X_{2\text{опт}}, \dots, X_{r\text{опт}}$ для составления общего оптимального плана, необходимо продолжить симплексный метод, каждый раз включая в базис вектор с нулевой Δ -оценкой, пока первоначально полученный оп-

тимальный план не повторится. Тогда все оптимальные планы определяются выпуклой линейной комбинацией полученных планов:

$$X_{\text{опт}} = \lambda_1 X_{1\text{опт}} + \lambda_2 X_{2\text{опт}} + \dots + \lambda_r X_{r\text{опт}},$$

где $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1, r}$.

Геометрически это соответствует случаю, когда линия уровня оптимума целевой функции принимает положение опорной прямой, проходящей через сторону ОДР (рис. 1.14).

Пример 1.11. Найти решение задачи ЛП

$$L(X) = 3x_1 + 3x_2 + 5 \rightarrow \max \text{ при ограничениях } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

☺ Решение.

Приведём данную систему ограничений к основному виду, путём введения неотрицательных балансовых переменных:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

и выделим базис:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 8 \\ \textcircled{2} & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) : (-2) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ \textcircled{-1} & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & -0,5 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{c} \leftarrow \oplus \\ \leftarrow \oplus \end{array} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1,5 & 1 & 0,5 & 0 & 7,5 \\ \textcircled{-1} & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & -1,5 & 0 & 0,5 & 1 & 1,5 \end{array} \right) \times (-1) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1,5 & \boxed{1} & 0,5 & \boxed{0} & 7,5 \\ 1 & -0,5 & \boxed{0} & -0,5 & \boxed{0} & 0,5 \\ 0 & -1,5 & \boxed{0} & 0,5 & \boxed{1} & 1,5 \end{array} \right). \\ & \text{единичный базис} \end{aligned}$$

Т. о., $\{A_3, A_1, A_5\}$ – базис при неотрицательном столбце чисел b_i .

Составим симплекс-таблицу для решения задачи (табл. 1.9). Для единообразия формы записи таблицы целевую функцию представим в виде

$$\tilde{L}(X) = L(X) - 5 = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

Таблица 1.9

Начальная итерация								
c_j	БП	3	3	0	0	0	$\tilde{L}(X)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
c_i		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
0	x_3	0	(1,5)	1	0,5	0	7,5	$7,5 : 1,5 = 5$
3	x_1	1	-0,5	0	-0,5	0	0,5	—
0	x_5	0	-1,5	0	0,5	1	1,5	—
$\Delta_j \geq 0$		0	-4,5	0	-1,5	0	1,5	Критерий на max не выполнен
Первая итерация								
3	x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	5	$5 : \frac{1}{3} = 15$
3	x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	3	—
0	x_5	0	0	1	(1)	1	9	$9 : 1 = 9 - \min$
$\Delta_j \geq 0$		0 БП	0 БП	3	0 не БП	0 БП	24	Критерий на max выполнен

На 1-й итерации получено оптимальное решение:

$$X_1 = (3; 5; 0; 0; 9), \quad \tilde{L}(X_1) = 24.$$

Однако в Δ -строке имеется нулевая оценка свободной переменной x_4 . Следовательно, решение X_1 не является единственным.

Продолжим преобразования симплексной таблицы.

Вторая итерация								
3	x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	2	—
3	x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	6	$6 : \frac{1}{3} = 18$
0	x_4	0	0	1	1	(1)	9	$9 : 1 = 9 - \min$
$\Delta_j \geq 0$		0 БП	0 БП	3	0 БП	0 не БП	24	Критерий на max выполнен

На 2-й итерации получено оптимальное решение:

$$X_2 = (6; 2; 0; 9; 0), \quad \tilde{L}(X_2) = 24.$$

Оценка свободной переменной x_5 равна нулю. Значит, переменную x_5 необходимо ввести в базис вместо переменной x_4 . Но набор базисных переменных x_2, x_1, x_5 уже встречался на 1-шаге симплекс-метода данной задачи (табл. 1.9).

Получили заикливание, что указывает на завершение итерационного процесса.

Найденным оптимальным решениям $X_1 = (3; 5; 0; 0; 9)$ и $X_2 = (6; 2; 0; 9; 0)$ соответствуют точки $A(3; 5)$ и $B(6; 2)$ графического решения (рис. 1.40).

Окончательно все оптимальные планы определяются выпуклой линейной комбинацией найденных планов:

$$X_{\text{опт}} = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2,$$

где $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ (на рис. 1.40 точки отрезка $[AB]$).

Введём обозначения $\lambda_1 = 1 - t$, $\lambda_2 = t$, $0 \leq t \leq 1$. Тогда

$$X_{\text{опт}} = (1 - t) X_1 + t X_2,$$

$$X_{\text{опт}} = (1 - t)(3; 5; 0; 0; 9) + t(6; 2; 0; 9; 0) = (6 - 3t; 2 + 3t; 0; 9 - 9t; 9t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

При этом

$$\max L(X) = \max \tilde{L}(X) + 5 = \tilde{L}(X_{\text{опт}}) + 5 = 24 + 5 = 29.$$



На практике альтернативные оптимальные решения весьма полезны, поскольку позволяют сделать выбор среди множества решений без изменения значения целевой функции.

1.15.3. Отсутствие конечного оптимума

Если оптимальный план ещё не найден, а **столбец Q не содержит положительных элементов**, то целевая функция не ограничена на ОДР. Оптимального плана нет.

Геометрически это соответствует случаю, когда линия уровня оптимума целевой функции не принимает положения опорной прямой ни в какой точке неограниченного многоугольника решений (рис. 1.11).

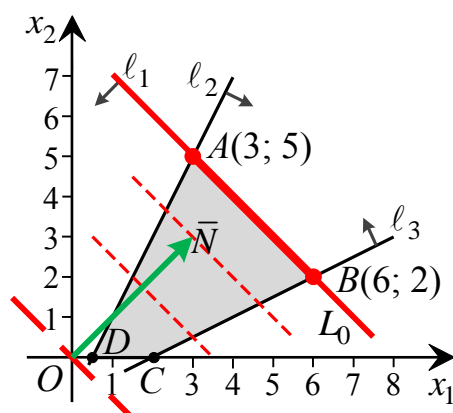


Рис. 1.40.

Пример 1.12. Найти решение задачи ЛП

$$L(X) = -3x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$\text{при ограничениях} \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + 3x_2 - x_4 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

☺ Решение. Приведём систему ограничений к каноническому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \times (-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & \textcircled{1} & 0 & 6 \\ 1 & -3 & 0 & \textcircled{1} & 3 \end{array} \right).$$

Составим симплексную таблицу (табл. 1.10).

Таблица 1.10

Начальная итерация							
c_j	БП	-3	-5	1	1	$L(X)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
c_i		x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	
1	x_3	-2	$\textcircled{3}$	1	0	6	$6:3=2$
1	x_4	1	-3	0	1	3	—
$\Delta_j \leq 0$		2	5	0	0	9	Критерий на min не выполнен
Первая итерация							
-5	x_2	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	2	
1	x_4	-1	0	1	1	9	
$\Delta_j \leq 0$		$\frac{16}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	0	-1	Критерий на min не выполнен

Так как $\Delta_1 = \frac{16}{3} > 0$, то критерий оптимальности на минимум ещё не выполнен. Но в столбце переменной x_1 нет ни одного положительного коэффициента. Решение задачи прекращаем вследствие неограниченности целевой функции и отсутствия конечного оптимума. $\min L \rightarrow -\infty$. ☺

Замечание. Если **оптимальный план уже найден**, но среди оценок Δ_j оптимального плана **равны нулю не только оценки базисных векторов**, то полученный оптимальный план X_1 не является единственным. При этом получили **столбец Q , не содержащий положительных элементов**. Таким образом, целевая функция при-

нимает экстремальное значение для найденного оптимального плана, но всё многообразие оптимальных планов не определяется.

Геометрически это соответствует случаю, когда линия уровня оптимума целевой функции принимает положение опорной прямой, проходящей через сторону-луч неограниченного многоугольника решений (рис.1.15).

1.15.4. Вырожденность оптимального решения

В ходе выполнения симплекс-метода проверка условия допустимости может привести к неоднозначному выбору исключаемой переменной из базиса. Это происходит, когда наименьшее значение Q соответствует нескольким базисным переменным. В этом случае на следующем шаге одна или несколько **базисных переменных примут нулевое значение**. Новое решение будет вырожденным.

Какую переменную с наименьшим значением Q_i выбрать для вывода из базиса?

Выполним следующие действия:

- ✓ Строки, давшие одинаковое минимальное значение Q_i , разделим на свои разрешающие элементы a_{ik} , где k – номер разрешающего столбца.
- ✓ Сравним соответствующие частные $\frac{a_{ij}}{a_{ik}}$ выбранных строк.
- ✓ Из базиса выводится та переменная, в строке которой раньше обнаружится наименьшее отношение $\frac{a_{ij}}{a_{ik}}$.

В вырожденном решении нет никакой опасности, за исключением небольших теоретических неудобств. С практической точки зрения вырожденность объясняется тем, что в исходной задаче присутствует, по крайней мере, одно лишнее ограничение. Графическая интерпретация задачи представлена на рис. 1.41.

Пример 1.13. Найти решение задачи ЛП

$$L(X) = 3x_1 + 9x_2 \rightarrow \max \text{ при ограничениях } \begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 8, \\ x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

© Решение. Введём балансовые переменные x_3 и x_4 , которые являются базисными. Составим симплексную таблицу нулевого шага (табл. 1.11).

Таблица 1.11

c_j c_i	БП	3	9	0	0	$L(X)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
		x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	
0	x_3	1	4	1	0	8	$8:4=2 - \min$
0	x_4	1	2	0	1	4	$8:4=2 - \min$
$\Delta_j \geq 0$		-3	-9	0	0	0	Критерий на тах не выполнен

Поскольку в Δ -строке содержатся отрицательные оценки Δ_1 и Δ_2 , то критерий на максимум не выполнен. Так как Δ_2 – наибольшая по модулю оценка, то переменную x_2 вводим в базис. Столбец переменной x_2 является разрешающим. Так как $Q_1 = Q_2 = 2$, то разрешающая строка не определяется. Проведём дополнительную работу со строками базисных переменных, имеющих одинаковое минимальное значение Q :

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	
x_3	1	④	1	0	8	:4
x_4	1	②	0	1	4	:2
x_3	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	2	
x_4	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	2	

Из базиса выводим переменную x_3 , так как в её строке раньше определилось меньшее отношение $\frac{a_{ij}}{a_{ik}} = \frac{1}{4}$. Вернемся к симплекс-таблице 1.11, определившись с разрешающим элементом.

Таблица 1.11'

Начальная итерация							
c_j c_i	БП	3	9	0	0	$L(X)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
		x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	
0	x_3	1	④	1	0	8	$8:4=2 - \min$
0	x_4	1	2	0	1	4	$8:4=2 - \min$
$\Delta_j \geq 0$		-3	-9	0	0	0	Критерий на тах не выполнен

Первая итерация							
9	x_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	2	$2 : \frac{1}{4} = 8$
0	x_4	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$0 : \frac{1}{2} = 0 - \min$
$\Delta_j \geq 0$		$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	0	18	Критерий на max не выполнен
Вторая итерация							
9	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	
3	x_1	1	0	-1	2	0	
$\Delta_j \geq 0$		0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	18	Критерий на max выполнен

Получили вырожденное ($x_1 = 0$) оптимальное решение:

$$X_{\text{опт}} = (0; 2; 0; 0), L(X_{\text{опт}}) = 18.$$



Что же практически приводит к вырожденности решения? Рассмотрим рис. 1.41, представляющий графическое решение этой задачи. Точка оптимума $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ является пересечением трёх прямых. Поскольку данная задача двухмерна, эта точка *переопределена* (на плоскости для определения точки достаточно двух прямых), и, следовательно, одно из ограничений избыточное (лишнее).

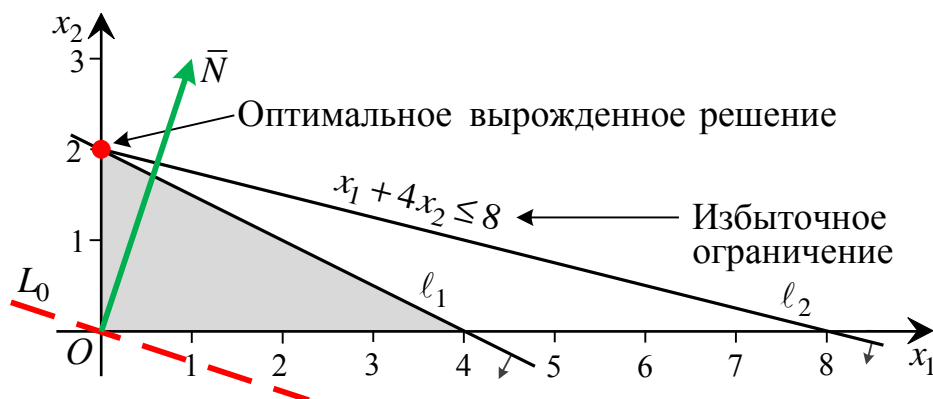


Рис. 1.41.

На практике информация о том, что некоторые ресурсы избыточны (недефицитны), может быть полезной при анализе результатов решения задач. Эти сведения могут помочь выявить неточности и ошибки в постановке исходной задачи. К сожалению, не существует способов определить избыточное ограничение непосредственно из симплекс-таблиц.

С вычислительной и теоретической точек зрения вырожденность может привести к двум последствиям.

- Во-первых, в процессе вычислений может возникнуть заикливание. Если в примере 1.13 сравнить первую и вторую итерацию (табл. 1.11), то можно заметить, что значение целевой функции не изменилось ($L=18$). Поэтому может возникнуть ситуация, когда при реализации симплекс-метода некоторая последовательность будет повторяться, не изменяя значение целевой функции и не приводя к завершению вычислительного процесса. Существуют методы, предотвращающие заикливание, однако они замедляют вычисления. Поэтому в большинстве программ, реализующих симплекс-метод, отсутствуют специальные средства от заикливания. Тем более, что вероятность заикливания очень мала.

- Во-вторых, последствие вырожденности решения можно обнаружить, сравнивая первую и вторую итерации в табл. 1.11. Хотя в этих итерациях состав базисных и свободных переменных различен, значения всех переменных и значение целевой функции не изменяются:

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0, L = 18.$$

Можно ли, несмотря на то, что оптимальное решение не достигнуто, остановить вычисления на итерации, когда впервые обнаруживается вырожденность? Нет, так как решение может быть только временно вырожденным. Рассмотрим подтверждающий это пример.

Пример 1.14. Найти решение задачи ЛП

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \text{ при ограничениях } \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 4x_1 - x_2 \leq 8, \\ 4x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

☺ Решение. Введём балансовые переменные x_3, x_4 и x_5 , которые являются базисными. Вычисления представим в табл. 1.12.

Таблица 1.12

Начальная итерация								
c_j c_i	БП	3	2	0	0	0	$L(X)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
0	x_3	4	3	1	0	0	12	$12:4=3$
0	x_4	④	-1	0	1	0	8	$8:4=2 - \min$
0	x_5	4	1	0	0	1	8	$8:4=2 - \min$
$\Delta_j \geq 0$		-3	-2	0	0	0	0	Критерий на max не выполнен

Первая итерация								
0	x_3	0	4	1	-1	0	4	$4:4=1$
3	x_1	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	2	—
0	x_5	0	(2)	0	-1	1	0	$0:2=0 - \min$
$\Delta_j \geq 0$		0	$-\frac{11}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0	6	Критерий на тах не выполнен
Вторая итерация								
0	x_3	0	0	1	(1)	-2	4	$4:1=4 - \min$
3	x_1	1	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	2	$2:\frac{1}{8}=16$
2	x_2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	—
$\Delta_j \geq 0$		0	0	0	$-\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	6	Критерий на тах не выполнен
Третья итерация								
0	x_4	0	0	1	1	-2	4	—
3	x_1	1	0	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$	—
2	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	2	—
$\Delta_j \geq 0$		0	0	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{17}{2}$	Критерий на тах выполнен

На 1-й итерации было получено вырожденное решение, которое оказалось временным, так как оптимальное решение не содержит нулевых базисных компонент: $X_{\text{опт}} = \left(\frac{3}{2}; 2; 0; 4; 0\right)$, $L(X_{\text{опт}}) = \frac{17}{2}$. ☺

1.15.5. Отсутствие допустимых решений

Если ограничения задачи ЛП несовместны, то задача не имеет допустимых решений. С практической точки зрения отсутствие допустимых решений свидетельствует о том, что задача сформулирована некорректно.

Пример 1.15. Найти решение задачи ЛП

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \text{ при ограничениях } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

☺ Решение. В систему ограничений введём балансовые переменные:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_4 = 12, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Далее необходимо выделить базисные переменные. Но все варианты наборов свободных и базисных переменных, а их $C_4^2 = 6$ комбинаций, дают недопустимые решения, так как все варианты содержат отрицательные компоненты (например, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = -4$).

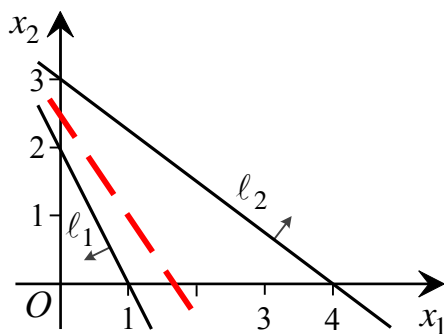


Рис. 1.42

Следовательно, данная задача ЛП неразрешима.

При графическом решении полуплоскости, определяемые ограничениями-неравенствами, не пересекаются (рис. 1.42). ОДР представляет собой пустое множество. Это означает, что задача не имеет решения.



1.16. Метод искусственного базиса

В задачах линейного программирования, где все ограничения являются неравенствами со знаком “ \leq ” и с неотрицательной правой частью, дополнительные (балансовые переменные) позволяют сформировать начальное допустимое базисное решение. Естественно, возникает вопрос: как найти начальное допустимое базисное решение в задачах ЛП, где есть ограничения в виде равенств или неравенств со знаком “ \geq ”?

Метод искусственного базиса применяется для решения задач ЛП симплексным методом в случае, когда задача не имеет легко определяемого начального опорного решения с базисом из единичных векторов.

Согласно данному методу для задачи ЛП составляется так называемая расширенная задача, которая решается симплексным методом. На основе результатов решения расширенной задачи либо находится оптимальное решение исходной задачи, либо устанавливается причина отсутствия её решения.

Пусть имеется задача ЛП:

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \text{extr} \quad (1.16)$$

при ограничениях:

Без ограничения общности можно считать, что правые части уравнений системы ограничений неотрицательные, т. е. $b_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$.

Для исходной задачи составляют расширенную задачу. При этом используют искусственные переменные.

Определение. Искусственными переменными называются неотрицательные переменные, которые вводятся в ограничения-равенства для получения начального опорного решения с базисом из единичных векторов.

Эти переменные в первой итерации играют роль дополнительных переменных, но на последующих итерациях от них освобождаются.

Каждая искусственная переменная вводится в левую часть одного из уравнений системы ограничений с коэффициентом $+1$. Но, поскольку эта переменная искусственная (другими словами, не имеет никакого “физического” смысла в данной задаче), необходимо сделать так, чтобы на последующих итерациях она обратилась в ноль. Для этого в выражение целевой функции вводят так называемый *штраф*: в задаче на максимум искусственная переменная добавляется с коэффициентом $(-M)$, а в задаче на минимум – с коэффициентом $(+M)$. Число M сколь угодно большое по сравнению с единицей.

В общем случае **расширенная задача** на максимум имеет вид:

$$\tilde{L}(\tilde{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n - Mt_1 - Mt_3 - \dots - Mt_m \rightarrow \max \quad (1.18)$$

при ограничениях:

Целевая функция задачи на минимум представляется в виде

$$\tilde{L}(\tilde{X}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + M t_1 + M t_3 + \dots + M t_m \rightarrow \min .$$

Теорема 1.10. (Признак оптимального решения).

Если расширенная задача линейного программирования имеет оптимальное решение $\tilde{X}^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*; 0; \dots; 0)$, у которого все искусственные переменные равны нулю, то исходная задача имеет оптимальное решение $X^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$, которое получается из \tilde{X}^* отбрасыванием нулевых искусственных переменных.

► Пусть для задачи максимизации функции (1.16) при ограничениях (1.17) составлена расширенная задача (1.18), (1.19).

Пусть $\tilde{X}^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*; 0; \dots; 0)$ – оптимальный план расширенной задачи ЛП. Тогда система (1.19) при подстановке в неё оптимального решения \tilde{X}^* вырождается в систему (1.17). Т. е. $X^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$ является планом исходной задачи ЛП. При этом

$$\max \tilde{L}(\tilde{X}) = \tilde{L}(\tilde{X}^*) = c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + \dots + c_n x_n^* - M \cdot 0 - \dots - M \cdot 0 = L(X^*).$$

Покажем, что X^* к тому же является оптимальным планом.

Предположим, что X^* не является оптимальным планом исходной задачи ЛП. Тогда найдётся план X' , удовлетворяющий системе (1.17) такой, что $L(X') > L(X^*)$.

Но решение $\tilde{X}' = (x_1'; x_2'; \dots; x_n'; 0; \dots; 0)$ также будет удовлетворять системе (1.19), т. е. являться допустимым планом расширенной задачи ЛП.

При этом

$$\tilde{L}(\tilde{X}') = c_1 x_1' + c_2 x_2' + \dots + c_n x_n' - M \cdot 0 - \dots - M \cdot 0 = L(X').$$

В итоге получим:

$$\tilde{L}(\tilde{X}') = L(X') > L(X^*) = \tilde{L}(\tilde{X}^*) = \max \tilde{L},$$

что противоречит условию теоремы о том, что \tilde{X}^* – оптимальный план максимизации расширенной задачи ЛП.

Следовательно, наше предположение неверно. Т. е. X^* является оптимальным планом исходной задачи максимизации.

Аналогичны рассуждения в задаче на минимум. ■

Следствие 1. (Признак отсутствия решения ввиду несовместности системы ограничений). Если расширенная задача имеет оптимальное решение, у которого хотя бы одна искусственная переменная отлична от нуля, то исходная задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Следствие 2. (Признак отсутствия решения ввиду неограниченности целевой функции). Если расширенная задача не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, то исходная задача не имеет решения по той же причине.

Метод искусственного базиса в основном совпадает с обычным симплексным методом, но имеет некоторые особенности.

Особенности метода искусственного базиса:

1. Поскольку начальное опорное решение расширенной задачи содержит искусственные переменные, входящие в целевую функцию с коэффициентом $-M$ (в задаче на максимум) или $+M$ (в задаче на минимум), то индексные оценки Δ_j вычисляются посредством выражений, содержащих величину M .

2. Искусственные переменные, выводимые из базиса опорного решения, в дальнейшем исключаются из рассмотрения.

3. После выведения из базиса всех искусственных переменных, решение задачи продолжается обычным симплексным методом, с использованием оценок, не содержащих величину M .

Пример 1.16. Методом искусственного базиса найти решение задачи:

$$L(X) = 4x_1 + x_2 \rightarrow \min \text{ при ограничениях } \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

☺ Решение. В систему ограничений добавим балансовые переменные:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

В полученной системе 1-е и 2-е уравнения не имеют переменных с числовым коэффициентом $+1$, которые можно ввести в базисное решение. Поэтому введём в эти уравнения искусственные переменные t_1 и t_2 , а в целевую функцию добавим штраф $Mt_1 + Mt_2$. В результате получим следующую задачу ЛП.

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\tilde{X}) &= 4x_1 + x_2 + Mt_1 + Mt_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 + t_1 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + t_2 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}, \\ t_i \geq 0, \quad i = \overline{1,2}. \end{cases} \end{aligned}$$

В этой модифицированной задаче переменные t_1 , t_2 и x_4 можно использовать как начальное базисное решение. В результате получим следующую симплекс-таблицу (табл. 1.13).

Таблица 1.13

Начальная итерация									
c_j c_i	БП	4	1	0	0	M	M	$L(X)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
		x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	b_i	
M	t_1	③	1	0	0	1	0	3	$3:3=1 - \min$
M	t_2	4	3	-1	0	0	1	6	$6:4=1,5$
0	x_4	1	2	0	1	0	0	4	$4:1=4$
$\Delta_j \leq 0$		$7M-4$	$4M-1$	$-M$	0	0	0	$9M$	Критерий на min не выполнен

Для задачи минимизации находим наибольшую положительную оценку $\Delta_1 = 7M - 4$. Соответственно переменная x_1 должна быть введена в базис. Т. к. $Q_1 = 1$ – наименьшее отношение, то искусственная переменная t_1 выводится из базиса. Составим 1-ую итерацию симплекс-таблицы 13. При этом столбец переменной t_1 можно исключить из дальнейшего решения.

Таблица 1.13'

Первая итерация									
c_j c_i	БП	4	1	0	0	M	M	$L(X)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
		x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	b_i	
4	x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	0		0	1	$1:\frac{1}{3}=3$
M	t_2	0	⑤ $\frac{5}{3}$	-1	0		1	2	$2:\frac{5}{3}=\frac{6}{5} - \min$
0	x_4	0	$\frac{5}{3}$	0	1		0	3	$3:\frac{5}{3}=\frac{9}{5}$
$\Delta_j \leq 0$		0	$\frac{4+5M}{3}$	$-M$	0		0	$4+2M$	Критерий на min не выполнен

Так как $\Delta_2 = \frac{4+5M}{3} > 0$, то критерий на минимум не выполнен. Переменная x_2 становится базисной, а искусственная переменная t_2 выводится из базиса и исключается из дальнейшего решения. Составим вторую

итерацию симплекс-таблицы 1.13, где искусственные переменные t_1, t_2 и выражение штрафа полностью исключены из задачи.

Таблица 1.13''

Вторая итерация									
c_j c_i	БП	4	1	0	0	M	M	$L(X)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
		x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	b_i	
4	x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0			$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5} : \frac{1}{5} = 3$
1	x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0			$\frac{6}{5}$	—
0	x_4	0	0	①	1			1	$1 : 1 = 1 - \min$
$\Delta_j \leq 0$		0	0	$\frac{1}{5}$	0			$\frac{18}{5}$	Критерий на min не выполнен

В Δ -строке полученной таблицы оценка $\Delta_3 > 0$, соответственно переменную x_3 необходимо ввести в базис. При этом переменная x_4 выводится из него. Составим 3-ю итерацию симплекс-таблицы 1.13.

Таблица 1.13'''

Третья итерация									
c_j c_i	БП	4	1	0	0	M	M	$L(X)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
		x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	b_i	
4	x_1	1	0	0	$-\frac{1}{5}$			$\frac{2}{5}$	—
1	x_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$			$\frac{9}{5}$	—
0	x_3	0	0	1	1			1	—
$\Delta_j \leq 0$		0	0	0	$-\frac{1}{5}$			$\frac{17}{5}$	Критерий на min выполнен

Таким образом, $X_{\text{опт}} = \left(\frac{2}{5}; \frac{9}{5}; 1; 0\right)$, $L(X_{\text{опт}}) = \frac{17}{5}$.



Пример 1.17. Найти решение задачи ЛП из примера 1.15:

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \text{ при ограничениях } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

☺ Решение. Используем метод искусственного базиса.

В систему ограничений добавим балансовые переменные x_3 и x_4 , во второе ограничение введём искусственную переменную t :

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 - M t \rightarrow \max, \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_4 + t = 12, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}, \\ t \geq 0. \end{cases}$$

Результат применения симплекс-метода представлен в табл. 1.14.

Таблица 1.14

Начальная итерация								
c_j	БП	4	1	0	0	$-M$	$L(X)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
c_i		x_1	x_2	x_3	x_4	t	b_i	
0	x_3	2	①	1	0	0	2	$2:1 = 2 - \min$
$-M$	t	3	4	0	-1	1	12	$12:4 = 3$
$\Delta_j \geq 0$		$-3M - 3$	$-4M - 2$	0	M	0	$-12M$	Критерий на тах не выполнен
Первая итерация								
2	x_2	2	1	1	0	0	2	—
$-M$	t	-5	0	-4	-1	1	4	—
$\Delta_j \geq 0$		$5M + 1$	0	$4M + 2$	M	0	$4 - 4M$	Критерий на тах выполнен

В точке оптимума искусственная переменная отлична от нуля ($t = 4$), что свидетельствует об отсутствии допустимого решения (следствие 1 теоремы 1.10). Аналогичный результат был получен в примере 1.15.



1.17. Задачи целочисленного ЛП

Если переменные в задаче ЛП соответствуют числу машин, станков, людей или каких-либо иных неделимых объектов, то имеют смысл только целочисленные значения переменных.

Определение. Задачи оптимизации, в которых искомые переменные должны быть целочисленными, называются задачами *целочисленного программирования*.

К задачам целочисленного ЛП следует подходить очень внимательно, а не пользоваться "очевидным" рецептом и округлять нецелое оптимальное решение непрерывной задачи до ближайших целых значений, поскольку округление может привести к недопустимому решению.

1.17.1. Графический метод решения

Решением проблемы является полный перебор всех допустимых планов с целочисленными координатами, лежащих в ОДР. Такой метод является **методом полного перебора**. Его трудоёмкость с ростом числа переменных и расширением области допустимых решений значительно возрастает. Поэтому для реальных задач он является неприемлемым.

Метод целочисленной решётки – в области допустимых решений строят целочисленную решётку и находят на ней такие целые числа x_1 и x_2 , которые удовлетворяют системе ограничений и при которых значение целевой функции экстремально. Координаты такой вершины и являются целочисленным решением.

Пример 1.18. Организация приняла решение об увеличении выпуска конкурентно способной продукции, для чего в одном из цехов необходимо установить дополнительное оборудование, занимающее $19/3$ м² площади. На приобретение дополнительного оборудования организация выделила 10 млн. руб., причём она может купить оборудование двух видов. Приобретение одного комплекта оборудования 1-го вида стоит 1 млн. руб., 2-го вида – 3 млн. руб. Приобретение одного комплекта оборудования 1-го вида позволяет увеличить выпуск продукции в смену на 2 ед., а одного комплекта оборудования 2-го вида – на 4 ед. Для установки одного комплекта оборудования 1-го вида требуется 2 м² площади, а для оборудования 2-го вида – 1 м² площади. Определить набор дополнительного оборудования, при котором максимально увеличится выпуск продукции.

☺ Решение. Введём обозначения:

x_1 – количество комплектов дополнительного оборудования 1-го вида;

x_2 – количество комплектов оборудования 2-го вида.

Математическая модель задачи будет иметь вид:

$$L(X) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \text{ при ограничениях } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq \frac{19}{3}, \\ x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2. \end{cases}$$

Область допустимых решений – четырёхугольник $OABC$. Оптимальное решение задачи без учёта целочисленности находится в точке $B\left(\frac{9}{5}; \frac{41}{15}\right)$.

Построим в ОДР целочисленную решётку, которая содержит 12 точек с целочисленными координатами (рис.1.43).

Линию уровня перемещаем по направлению вектора нормали \bar{N} .

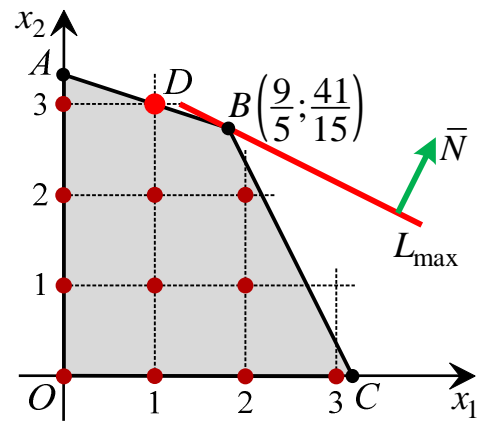


Рис.1.43

Максимальное значение целевой функции достигается в точке $D(1;3)$:

$$L_{\max} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 14 \text{ (ед.)}.$$

Ответ: организации следует приобрести один комплект оборудования 1-го вида и три комплекта оборудования 2-го вида, что обеспечит ей увеличение выпуска продукции, равное 14 ед. в смену.



Метод ветвей и границ – в процессе решения вводят дополнительные ограничения-неравенства, обеспечивающие целочисленность оптимального плана.

Пример 1.19. Найти оптимальный целочисленный план задачи ЛП:

$$L(X) = 11x_1 - x_2 \rightarrow \max \text{ при ограничениях: } \begin{cases} 14x_1 - 5x_2 \leq 42, \\ 6x_1 + 11x_2 \leq 110, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

☺ *Решение.* Решим задачу графически путём отбрасывания условий целочисленности (рис.1.44).

Функция $L(X)$ принимает максимальное значение в точке $B(5,5;7)$, при этом $L_{\max} = 53,5$.

Найденное решение недопустимо, т. к. значение $x_1 = 5,5$ – нецелое число. Ближайшее целое значение переменной x_1 – это 5.

Для того чтобы найти возможные целые значения переменных x_1 и x_2 , введём новое ограничение: $x_1 \leq 5$

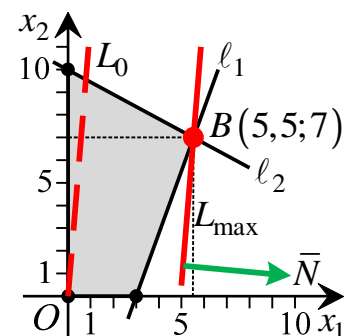


Рис. 1.44

Задача ЛП примет вид: $L(X) = 11x_1 - x_2 \rightarrow \max$,

$$\begin{cases} 14x_1 - 5x_2 \leq 42, \\ 6x_1 + 11x_2 \leq 110, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1 \leq 5. \end{cases}$$

Продолжая решать задачу графически (рис.1.45), получаем, что функция L примет максимальное значение в точке $B'(5;6)$, при этом $L_{\max} = 49$ – что соответствует предполагаемому оптимуму.

Ответ: $L_{\max} = 49$ при $X = (5;6)$.

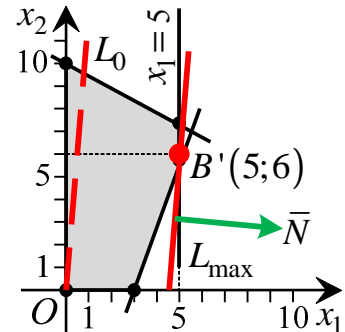


Рис. 1.45

☺.

Замечание. Описанную операцию разбиения исходной задачи можно повторять несколько раз до получения целочисленного оптимума.

Пример 1.20. Найти оптимальный целочисленный план задачи ЛП:

$$L = 5x_1 - x_2 \rightarrow \max \text{ при ограничениях: } \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2. \end{cases}$$

☺ *Решение.* Решим задачу графическим методом без учёта условия целочисленности (рис.1.46).

Целевая функция L принимает максимальное значение в т. $B = \ell_1 \cap \ell_2$:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 10, \\ x_1 + x_2 = 8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{50}{7}, \\ x_2 = \frac{6}{7}. \end{cases}$$

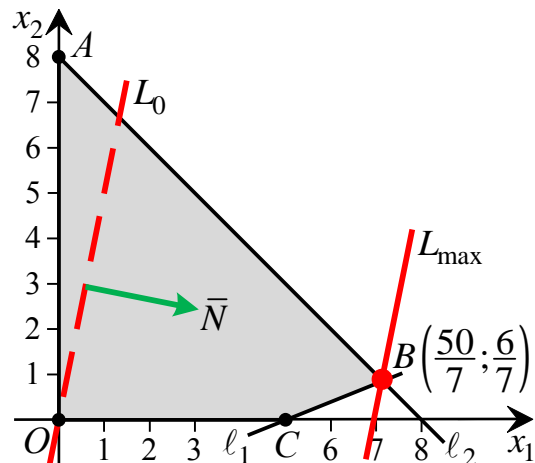


Рис.1.46

Поскольку оптимальное решение, найденное графически, не удовлетворяет условию целочисленности, метод ветвей и границ изменяет ОДР так, что в конечном счёте получается оптимальное решение задачи целочисленного ЛП. Для этого сначала выбирается одна из целочисленных переменных, найденное значение которой не является целочисленным. Например, выбирая x_2 , замечаем, что область

$1 < x_2 < 2$ многоугольника решений не содержит целочисленных значений переменной x_2 и, следовательно, может быть исключена из рассмотрения, как бесперспективная. Это эквивалентно новой системе ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ \begin{cases} 0 \leq x_2 \leq 1, \\ 2 \leq x_2 \leq 8, \end{cases} \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

В новой области допустимых решений (рис.1.47) функция L принимает максимальное значение в точке K :

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 10, \\ x_1 = 7. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7, \\ x_2 = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Полученное решение не допустимо, т.к. пока ещё не удовлетворяет условию целочисленности.

Ближайшей к точке K точкой с целыми координатами (с учётом положения линий уровня) является $F(7;1)$, при этом

$$L(7;1) = 34.$$

Убедимся, что найденное значение целевой функции является наибольшим из всех близлежащих точек с целыми координатами:

$$L(E) = L(6;1) = 5 \cdot 6 - 1 = 29;$$

$$L(C) = L(5;0) = 5 \cdot 5 - 0 = 25;$$

$$L(M) = L(6;2) = 5 \cdot 6 - 2 = 28.$$

Ответ: $L_{\max} = 34$ при $X = (7;1)$. ☺.

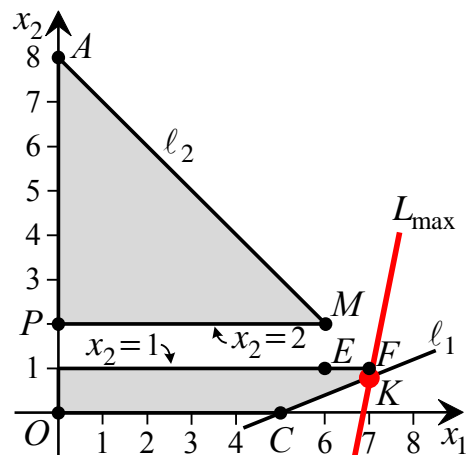


Рис.1.47

Пример 1.21. Лесничество имеет 24 га земли под паром. Оно может выращивать саженцы новогодней ели, которые достигают зрелости за один год, или бычков, отведя часть земли под пастбище. Деревья выращиваются и продаются в партиях по 1000 штук. Требуется 1,5 га для выращивания одной партии деревьев и 4 га для вскармливания одного бычка. Лесничество может потратить только 200 часов в год на свое побочное производство. Практика показывает, что требуется 20 часов для проведения культивации, подрезания, вырубki и пакетирования одной партии деревьев. Для ухода за одним бычком требуется 20 часов. Лесничество имеет возможность израсходовать на эти цели 6 тыс. руб. Годовые издержки на одну партию деревьев 150 руб. и 1,2 тыс. руб. на одного бычка. Уже заключен контракт на поставку двух бычков. По сложившимся ценам, одна новогодняя ель принесёт прибыль в 2,5 руб., один бычок – 5 тыс. руб.

☺ *Решение.* В качестве показателя эффективности целесообразно взять прибыль за операцию (годовую прибыль с земли в рублях).

В качестве переменных задачи следует взять:

- x_1 – количество откармливаемых бычков в год;
 x_2 – количество партий выращиваемых елей (по 1000 шт. каждая);
 5000 – чистый доход от одного бычка, руб.;
 2500 – чистый доход от одной партии деревьев (1000 шт. по 2,5 руб.).

Тогда целевая функция: $L(X) = 5000x_1 + 2500x_2 \rightarrow \max$.

Составим соответствующие ограничения.

Ограничение	Неравенство	Единицы измерения
по использованию земли	$4x_1 + 1,5x_2 \leq 24$	га
по бюджету	$1200x_1 + 150x_2 \leq 6000$	руб.
по трудовым ресурсам	$20x_1 + 20x_2 \leq 200$	час.
обязательства по контракту	$x_1 \geq 2$	шт.
областные ограничения (условия неотрицательности)	$\begin{cases} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$	

Решая задачу графически (рис.1.48), находим ОДР – пятиугольник $OABCD$, точка оптимума – точка $C(3,6; 6,4)$.

Найденное решение задачи определяет максимальный доход в размере 34 тыс. руб., который лесничество может извлечь, “выращивая 3,6 бычка и 6,4 партии новогодних елей”. Это решение недопустимо, т.к. оно нецелочисленное.

Целочисленные методы дают:

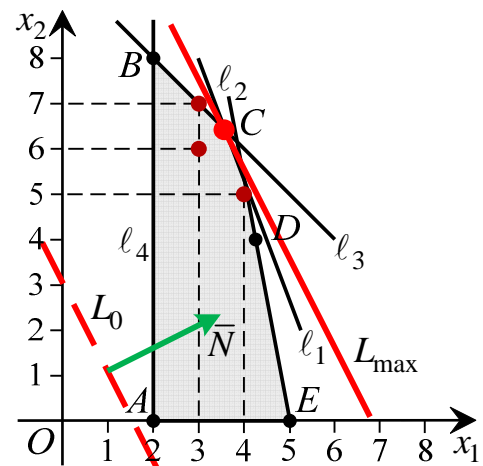


Рис.1.48

$x_1 = 3$ и $x_2 = 6$, что приводит к доходу в 30 тыс. руб.,

$x_1 = 4$ и $x_2 = 5$ приводит к более оптимальному результату в 32,5 тыс. руб.,

$x_1 = 3$ и $x_2 = 7$ приводит к аналогичному результату.

Ответ: $L_{\max} = 32,5$ (тыс.руб.) при $X_1 = (4;5)$ и $X_2 = (3;7)$. ☺

1.17.2. Метод Гóмори

Целочисленное решение может быть найдено с использованием алгоритма, предложенного Гóмори, который состоит в следующем.

Симплексным методом находят оптимальное решение задачи. Если решение целочисленное, то задача решена. Если же оно не целочисленное и содержит хотя бы одну дробную координату, то накладывают дополнительное ограничение по целочисленности и вычисления продолжают до

получения нового решения. Если и оно является нецелочисленным, то вновь накладывают дополнительное ограничение. Вычисления продолжают до тех пор, пока не будет получено целочисленное решение или показано, что задача не имеет такого.

Пусть получено оптимальное решение $X_{\text{опт}} = (b_1; b_2; \dots; b_k; 0; 0; \dots; 0)$, которое не является целочисленным.

k – ранг системы ограничений.

Пусть b_i и хотя бы одно a_{ij} – дробные числа.

Обозначим $[b_i]$ и $[a_{ij}]$ – целые части чисел b_i и a_{ij} соответственно. Целой частью некоторого числа называют наибольшее целое число, не превышающее данное число.

Дробную часть чисел b_i и a_{ij} обозначим $\{b_i\}$ и $\{a_{ij}\}$:

$$\{b_i\} = b_i - [b_i], \quad \{a_{ij}\} = a_{ij} - [a_{ij}].$$

С учётом введённых обозначений для всех дробных значений a_{ij} дополнительное ограничение по целочисленности примет вид:

$$\{a_{i,k+1}\}x_{k+1} + \{a_{i,k+2}\}x_{k+2} + \dots + \{a_{i,n}\}x_n \geq \{b_i\}.$$

Замечания.

1. Если b_i дробное число, а все значения a_{ij} – целые числа, то задача не имеет целочисленного решения.

2. Если ограничение целочисленности может быть наложено не на все переменные, а лишь на их часть, то такая задача является частично целочисленной.

Пример 1.22. Найти оптимальный целочисленный план задачи ЛП:

$$L(X) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \quad \text{при ограничениях} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq \frac{19}{3}, \\ x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ x_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2. \end{cases}$$

☺ Решение. Составим симплексную таблицу 1.15.

Таблица 1.15

Начальная итерация							
c_j	БП	2	4	0	0	$L(X)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
c_i		x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	
0	x_3	2	①	1	0	$\frac{19}{3}$	$\frac{19}{3} : 1 = \frac{19}{3}$

0	x_4	1	3	0	1	10	$10:3 = \frac{10}{3} - \min$
$\Delta_j \geq 0$		-2	-4	0	0	0	Критерий на тах не выполнен
Первая итерация							
0	x_3	$\left(\frac{5}{3}\right)$	0	1	$-\frac{1}{3}$	3	$3:\frac{5}{3} = \frac{9}{5} - \min$
4	x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}:\frac{1}{3} = 10$
$\Delta_j \geq 0$		$-\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	Критерий на тах не выполнен
Вторая итерация							
2	x_1	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$	—
4	x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{41}{15}$	—
$\Delta_j \geq 0$		0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{218}{15}$	Критерий на тах выполнен

Получим нецелочисленный план $X = \left(\frac{9}{5}; \frac{41}{15}\right)$, $L_{\max} = \frac{218}{15}$.

Найдём дробные части чисел $\frac{9}{5}$ и $\frac{41}{15}$:

$$\left\{\frac{9}{5}\right\} = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}, \quad \left\{\frac{41}{15}\right\} = \frac{41}{15} - 2 = \frac{11}{15}.$$

Т.к. $\frac{4}{5} = \frac{12}{15} > \frac{11}{15}$, то выбираем строку вектора \bar{A}_1 .

Учитывая дробные части чисел $\frac{3}{5}$ и $-\frac{1}{5}$:

$$\left\{\frac{3}{5}\right\} = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}, \quad \left\{-\frac{1}{5}\right\} = -\frac{1}{5} - (-1) = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5},$$

составляем дополнительное ограничение целочисленности для 1-й строки:

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 \geq \frac{4}{5} \quad \text{или} \quad \frac{3}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 - x_5 = \frac{4}{5},$$

которое вводим в 3-ю итерацию симплексной таблицы 1.15.

Таблица 1.15

Третья итерация								
c_j	БП	2	4	0	0	0	$L(X)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
c_i		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
2	x_1	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{9}{5}:\frac{3}{5} = 3$

4	x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{41}{15}$	—
0		0	0	$\left(\frac{3}{5}\right)$	$\frac{4}{5}$	-1	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4}{3} - \min$
$\Delta_j \geq 0$		0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	0	$\frac{218}{15}$	
Четвертая итерация								
2	x_1	1	0	0	-1	1	1	—
4	x_2	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	3	—
0	x_3	0	0	1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	—
Δ_j		0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	14	Критерий на тах выполнен

Ответ: $X_{\text{цел}} = (1; 3)$, $L_{\text{max цел}} = 14$. ☺

1.18. Построение экономико-математических моделей

Оптимальный ассортимент продукции.

Предприятие изготавливает два вида продукции P_1 и P_2 . Для производства используются сырьё типа A и B . Имеются данные:

Сырьё	Расход сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья, ед.
	P_1	P_2	
A	2	3	9
B	3	2	13

Суточный спрос на продукцию P_1 никогда не превышает спроса на продукцию P_2 более чем на 1 ед. Спрос на продукцию P_2 никогда не превышает 2 ед. Оптовые цены единицы продукции – 3 у.е. для P_1 и 4 у.е. для P_2 . Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Математическая формулировка. Определить объёмы производства (x_1 ед. P_1 , x_2 ед. P_2), максимизирующие доход L от реализации продукции, с учетом ограничений на спрос и расход сырья:

$$L = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 13, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_2 \leq 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2. \end{cases}$$

В качестве критериев оптимальности в задачах оптимизации производства могут быть использованы: прибыль, себестоимость, номенклатура производимой продукции, затраты рабочего времени.

Использование мощностей оборудования.

Предприятие имеет m моделей машин различных мощностей. Задан план по времени (T_i – время работы i -й машины) и номенклатуре (продукции j -го вида должно быть выпущено не менее N_j ед.). Известны производительность b_{ij} i -й машины по выпуску j -го вида продукции и стоимость c_{ij} единицы времени, затрачиваемого i -й машиной на выпуск j -го вида продукции. Необходимо составить такой план работы оборудования, чтобы обеспечить минимальные затраты на производство.

Математическая формулировка. Определить время x_{ij} работы i -й машины по выпуску j -го вида продукции, обеспечивающее минимальные

затраты на производство $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} = L_{\min}$ при соблюдении ограни-

чений по времени работы: $\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = T_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_{ij} \geq 0, \quad \forall ij. \end{cases}$

и количеству продукции: $\begin{cases} \sum_{i=1}^m b_{ij} \cdot x_{ij} \geq N_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases}$

Задача поставлена так, чтобы израсходовать всё отведенное время работы машины, т.е. обеспечить её полную загрузку. При этом количество выпускаемой продукции каждого вида должно быть, по крайней мере, не менее N_j . Однако в некоторых случаях не допускается превышение плана по номенклатуре, тогда ограничения математической модели примут вид:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq T_i, & i = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m b_{ij} \cdot x_{ij} = N_j, & j = \overline{1, n}, \\ x_{ij} \geq 0, & \forall ij. \end{cases}$$

Составление кормовой смеси (задача о диете).

Фирма покупает сырьё m различных видов и готовит различные типы смесей (продуктов). Каждый вид сырья содержит разное количество питательных компонентов (ингредиентов). Продукция должна удовлетворять, по крайней мере, некоторым минимальным требованиям с точки зрения питательности (полезности). Необходимо определить количество каждого i -го сырья, образующего смесь минимальной стоимости, при соблюдении требований к общему расходу смеси и её питательности.

Введем обозначения:

m – количество видов сырья;

n – количество ингредиентов в сырье;

x_i – количество i -го сырья в смеси;

c_i – стоимость единицы сырья i ;

a_{ij} – количество ингредиента j , содержащегося в единице i -го вида сырья;

b_j – минимальное количество ингредиента j , содержащегося в ед. смеси;

q – минимальный общий вес смеси, используемый фирмой.

Математическая формулировка. Определить оптимальное решение задачи ЛП:

$$L = \sum_{i=1}^m c_i \cdot x_i \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m x_i \geq q, \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot x_i \geq b_j \sum_{i=1}^m x_i, & j = \overline{1, n}, \\ x_i \geq 0, & i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Задача составления жидких смесей.

Фирма, торгующая различного рода химическими продуктами, каждый из которых является смесью нескольких компонентов, планирует изготовление смесей m -видов. S_i – объём i -го химического компонента, которым располагает фирма. Запланированный выпуск продукции хотя бы в минимальной степени должен удовлетворять имеющийся спрос D_j на каждый из химических продуктов. Для приготовления смеси имеются ограничения, определяемые минимальным отношением r между объёмами двух химических компонентов в процессе получения продукта j .

Обозначим:

x_{ij} – количество литров i -го химического компонента, используемого для получения j -го продукта;

P_{ij} – доход с единицы продукции x_{ij} .

Математическая формулировка. Определить оптимальное решение задачи ЛП:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P_{ij} \cdot x_{ij} = L_{\max} \quad \text{при ограничениях:} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^m x_i \leq S_i, \quad i = \overline{1, n}, \\ \sum_{i=1}^n x_i \geq D_j, \quad \forall j = \overline{1, m}, \\ \frac{x_{ij}}{x_{i+1j}} \geq r \quad \text{или} \quad x_{ij} - r \cdot x_{i+1j} \geq 0, \\ x_{ij} \geq 0, \quad \forall ij. \end{cases}$$

Задача о раскрое или о минимизации обрезков.

Фирма выпускает бумажные рулоны стандартной ширины и длины. По заказам потребителей фирма поставляет рулоны других размеров, для этого производится разрезание стандартных рулонов. Типичные заказы на рулоны нестандартных размеров (ширина H_i , длина l_i ,) могут включать m видов ($i = \overline{1, m}$). Потребность в нестандартных рулонах каждого вида равна b_i . Возможны n различных вариантов раскроя стандартных рулонов на нестандартные. При каждом варианте раскроя возможны потери P_j . К потерям следует относить также избыточные нестандартные рулоны y_{ij} , получаемые при различных вариантах раскроя ($j = \overline{1, n}$).

Обозначим:

a_{ij} – количество рулонов i -го вида, получаемых при раскрое единицы стандартного рулона по j -му варианту;

x_j – количество стандартных рулонов, разрезаемых по варианту j .

Математическая формулировка. Определить оптимальное решение задачи ЛП:

$$\sum_{j=1}^n P_j x_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij} = L_{\min} \text{ при ограничениях:}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \sum_{j=1}^n y_{ij} = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ y_{ij} \geq 0, \quad \forall ij. \end{cases}$$

Транспортная задача.

Имеется m поставщиков и n потребителей продукции. Известны затраты c_{ij} на перевозку груза от i -го поставщика j -му потребителю. Запасы (предложение) грузов у поставщиков – a_i ($i = \overline{1, m}$); потребности (спрос) каждого потребителя – b_j ($j = \overline{1, n}$). Суммарные потребности равны

суммарным запасам: $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. Требуется составить такой план перевозок, чтобы обеспечить минимальные суммарные затраты при полном удовлетворении потребностей.

x_{ij} – количество груза, перевозимого от i -го поставщика j -му потребителю.

Математическая формулировка. Определить оптимальное решение задачи ЛП:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = L_{\min} \text{ при ограничениях: } \begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j. \end{cases}$$

Глава 2. Двойственность задач ЛП

2.1. Определение двойственной задачи

Определение. Исходную задачу ЛП называют *прямой*. Каждой задаче ЛП можно определённым образом поставить в соответствие *двойственную задачу* (двойственную по отношению к исходной). Эти две задачи тесно связаны между собой и образуют *единую пару двойственных задач*.

Связь исходной и двойственной задач заключается в том, что решение одной из них может быть получено из решения другой.

В зависимости от структуры модели исходной задачи различают *симметричные, несимметричные и смешанные двойственные задачи*, которые определяются типами ограничений (наличием знаков \leq , \geq или $=$), знаками переменных (неотрицательные или произвольные по знаку) и типом оптимизации (максимизация или минимизация целевой функции).

Характеристики двойственных задач:

1. В одной задаче ищут максимум целевой функции, в другой – минимум.
2. Цены при переменных целевой функции одной из задач являются свободными членами системы ограничений другой задачи.
3. В задаче на максимум целевой функции все неравенства системы ограничений имеют знак « \leq »; а в задаче на минимум – знак « \geq ».
4. Каждому из m ограничений прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи.
5. Каждой из n переменных прямой задачи соответствует ограничение двойственной задачи.
6. Матрица числовых коэффициентов при переменных системы ограничений одной задачи транспонирована по отношению к матрице числовых коэффициентов при переменных системы ограничений другой задачи.

2.2. Математические модели двойственных задач

Симметричные двойственные задачи.

Таблица 2.1

Тип	Прямая задача: найти $X_{\text{опт}} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$	Двойственная задача: найти $Y_{\text{опт}} = (y_1; y_2; \dots; y_n)$
I тип	$L = C \cdot X \rightarrow \max, \begin{cases} A \cdot X \leq B, \\ x_j \geq 0. \end{cases}$	$S(Y) = B \cdot Y \rightarrow \min, \begin{cases} A^T \cdot Y \geq C, \\ y_i \geq 0. \end{cases}$
II тип	$L = C \cdot X \rightarrow \min, \begin{cases} A \cdot X \geq B, \\ x_j \geq 0. \end{cases}$	$S = B \cdot Y \rightarrow \max, \begin{cases} A^T \cdot Y \leq C, \\ y_i \geq 0. \end{cases}$

Характеристики симметричности:

1. Обе задачи (исходная и двойственная) являются стандартными (система ограничений содержит только неравенства) (табл. 2.1).
2. В обеих системах ограничений *присутствуют условия неотрицательности переменных* (табл. 2.1).

Несимметричные двойственные задачи.

Таблица 2.2

Тип	Прямая задача: найти $X_{\text{опт}} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$	Двойственная задача: найти $Y_{\text{опт}} = (y_1; y_2; \dots; y_n)$
I тип	$L = C \cdot X \rightarrow \max, \begin{cases} A \cdot X = B, \\ x_j \geq 0. \end{cases}$	$S(Y) = B \cdot Y \rightarrow \min, A^T \cdot Y \geq C$
II тип	$L = C \cdot X \rightarrow \min, \begin{cases} A \cdot X = B, \\ x_j \geq 0. \end{cases}$	$S = B \cdot Y \rightarrow \max, A^T \cdot Y \leq C$

Характеристики несимметричности:

1. Одна из задач (исходная), является основной (система ограничений содержит только уравнения), другая (двойственная) – стандартной (система ограничений содержит только неравенства) (табл. 2.1).
2. Для двойственной задачи (стандартной) в системе ограничений-неравенств *отсутствует условие неотрицательности* переменных (табл. 2.1).

Смешанные двойственные задачи.

Математическая модель прямой задачи включает в себя условия ограничения в виде равенств и неравенств (задаче в общем виде). При составлении двойственной задачи необходимо выполнять правила перехода для симметричных и несимметричных задач.

Правила, определяющие тип оптимизации и ограничений, знак переменных двойственной задачи, приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Прямая задача		Двойственная задача		
Целевая функция	Тип ограничений	Целевая функция	Тип ограничений	Переменные
Максимизация	\leq	Минимизация	\geq	Неотрицательные
	$=$			Свободные
Минимизация	\geq	Максимизация	\leq	Неотрицательные
	$=$			Свободные

2.3. Основные теоремы двойственности

Теорема 2.1. (1-я теорема двойственности для пары несимметричных двойственных задач). *Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то другая также имеет оптимальное решение, причём для любых оптимальных решений $X_{\text{опт}}$ и $Y_{\text{опт}}$ прямой и двойственной задач выполняется равенство*

$$L(X_{\text{опт}}) = S(Y_{\text{опт}}).$$

Если одна из задач имеет неограниченную целевую функцию, то другая неразрешима, т. е. не имеет допустимых решений.

► **I.** Пусть исходная задача имеет вид

$$L = C \cdot X \rightarrow \max, \text{ где } \begin{cases} A \cdot X = B, \\ x_j \geq 0. \end{cases}$$

Тогда двойственная несимметричная ей задача:

$$S = Y \cdot B \rightarrow \min, A^T \cdot Y \geq C.$$

Пусть в процессе симплекс-преобразований первоначальная матрица числовых коэффициентов A (нулевая итерация симплекс-таблицы) приняла вид \hat{A} (последняя итерация симплекс-таблицы).

Матрица A нулевой итерации содержит матрицу A^* координат новых базисных векторов, которые определяются матрицей \hat{A} последней итерации. Средствами матричного исчисления можно убедиться, что

$$A = A^* \cdot \tilde{A}. \quad (2.1)$$

При этом будет получен оптимальный план \hat{X} исходной задачи. Выделим в нём матрицу X_0 нулевых компонент и матрицу X^* положительных компонент:

$$\hat{X} = X_0 + X^*.$$

Тогда

$$\begin{cases} \max L = L(\hat{X}) = C \cdot \hat{X} = C^* \cdot X^*, \\ B = A \cdot \hat{X} = A^* \cdot X^*, \end{cases} \quad (2.2)$$

C^* – матрица цен в целевой функции при базисных переменных (они соответствуют положительным компонентам оптимального решения).

C_0 – матрица цен в целевой функции при свободных переменных (они соответствуют нулевым компонентам оптимального решения).

Таким образом, исходная матрица цен имеет вид: $C = C_0 + C^*$.

С учётом правил матричного исчисления из (2.1), (2.2) выразим:

$$A = A^* \cdot \hat{A}. \quad (2.3)$$

$$X^* = (A^*)^{-1} \cdot B. \quad (2.4)$$

Можно убедиться, что $(A^*)^{-1}$ – матрица координат векторов исходного базиса (нулевой итерации) в новом базисе (последней итерации), т. е. она содержится в матрице \hat{A} .

Т.к. \hat{X} – оптимальный план, то в последней итерации выполняется критерий оптимальности задачи минимизации:

$$\Delta_m = L_m - c_m \geq 0, \quad m = \overline{1, k}.$$

В матричном виде получим: $\Delta = C^* \cdot \hat{A} - C \geq 0$.

Составим матрицу $Y^* = C^* \cdot (A^*)^{-1}$ и проверим для неё определение оптимального плана двойственной задачи (минимизации).

$$\begin{aligned} 1) \quad A^T Y^* - C &= \left(C^* \cdot (A^*)^{-1} \right) \cdot A - C = \\ &= C^* \cdot \left((A^*)^{-1} \cdot A \right) - C \stackrel{(2.2)}{=} C^* \hat{A} - C \stackrel{(2.4)}{=} \Delta \geq 0, \\ &\Rightarrow Y^* A - C \geq 0 \Rightarrow Y^* A \geq C, \end{aligned}$$

значит, выполнено условие системы ограничений двойственной задачи. Следовательно, Y^* – допустимый план.

$$\begin{aligned} 2) \quad S(Y^*) &= Y^* B = \left(C^* \cdot (A^*)^{-1} \right) \cdot B = \\ &= C^* \cdot \left((A^*)^{-1} \cdot B \right) \stackrel{(2.3)}{=} C^* X^* \stackrel{(2.1)}{=} \max L = L(\hat{X}). \end{aligned}$$

Т.е. получили:

$$S(Y^*) = L(\hat{X}). \quad (2.5)$$

При этом для произвольного допустимого решения двойственной задачи имеем:

$$S(Y) = Y \cdot B = Y \cdot (A \cdot X) = (Y \cdot A) \cdot X \geq C \cdot X = L(X).$$

Т. о. для любых допустимых решений X и Y справедливо:

$$S(Y) \geq L(X).$$

Тогда и для оптимального плана \hat{X} исходной задачи справедливо:

$$S(Y) \geq L(\hat{X}).$$

С учётом равенства (2.5) окончательно получим:

$$S(Y) \geq S(Y^*).$$

Следовательно, $S(Y^*) = \min S$.

II. Пусть целевая функция исходной задачи минимизации не имеет решений, т. е. не ограничена сверху. Тогда из справедливости полученного неравенства для любых допустимых решений X и Y :

$$S(Y) \geq L(X).$$

Следовательно выражение $S(Y) \geq +\infty$ лишено смысла.

Следовательно, двойственная задача также не имеет решений. ■

Теорема 2.2. (2-я теорема двойственности для пары симметричных двойственных задач). *Положительные компоненты оптимального плана двойственной задачи равны абсолютным значениям цен целевой функции исходной несимметричной задачи, выраженной через небазисные переменные её оптимального решения.*

Следствие. *Положительным компонентам (базисным) оптимального решения исходной задачи соответствуют нулевые компоненты оптимального решения двойственной задачи.*

Теорема 2.3. (о дополняющей нежёсткости). *Для оптимальности допустимых решений пары двойственных задач $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли системе уравнений*

$$\begin{aligned} x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i - c_j \right) &= 0, \quad \forall j = \overline{1, n}, \\ y_i \cdot \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j - b_i \right) &= 0, \quad \forall i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Проанализируем уравнения системы в теореме:

$$y_i \cdot \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j - b_i \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_i > 0 & \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j < b_i & \Rightarrow y_i = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.6) \\ (2.7) \end{matrix}$$

$$x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i - c_j \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_j > 0 & \Rightarrow \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i = c_j, \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i > c_j & \Rightarrow x_j = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.8) \\ (2.9) \end{matrix}$$

Вывод:

- (2.6) Если компонента y_i положительна, то i -ресурс используется полностью.
- (2.7) Если i -ресурс используется не полностью, то компонента y_i равна нулю.
- (2.8) Если j -й вид продукции вошёл в оптимальный план, то в двойственных оценках он не убыточен (т.е. затраты на его изготовление равны прибыли).
- (2.9) Если j -й вид продукции убыточен, то он не войдёт в оптимальный план исходной задачи.

2.4. Оптимальное решение двойственной задачи

Прямая и двойственная задачи так тесно взаимосвязаны, что оптимальное решение одной задачи можно получить непосредственно (без дополнительных вычислений) из симплекс-таблицы, представляющей оптимальное решение другой. Покажем методы получения этого результата.

Метод 1. Если в оптимальном решении прямой задачи имеется положительная компонента $x_j > 0$, то по теореме 2.3 соответствующее j -ое ограничение двойственной задачи выполняется в виде равенства. Это обстоятельство позволяет составить систему уравнений для нахождения компонент оптимального решения двойственной задачи.

Если при подстановке компонент $X_{\text{опт}}$ в систему ограничений прямой задачи i -е ограничение будет выполняться как строгое неравенство, то по теореме 2.3 соответствующая переменная двойственной задачи обращается в нуль, т. е. $y_i = 0$.

Метод 2. Метод основан на использовании симплекс-таблиц и теоремы 2.1).

$$\begin{pmatrix} \text{Оптимальные значения} \\ \text{двойственных} \\ \text{переменных} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Вектор-строка исходных} \\ \text{коэффициентов целевой функции} \\ \text{при базисных переменных} \\ \text{в оптимуме прямой задачи} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{Обратная матрица} \\ \text{в оптимуме} \\ \text{прямой задачи} \end{pmatrix}$$

Элементы в вектор-строке исходных коэффициентов целевой функции должны быть перечислены в таком порядке, в каком базисные переменные перечислены в базисном столбце (БП) в симплекс-таблице.

Метод 3. Метод базируется на взаимно однозначном соответствии между переменными (следствие из теоремы 2.2) – основным переменным пря-

мой задачи соответствуют балансовые переменные двойственной и наоборот (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Прямая задача											
Основные переменные						Балансовые переменные					
x_1	x_2	...	x_j	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+i}	...	x_{n+m}
\updownarrow	\updownarrow	...	\updownarrow	...	\updownarrow	\updownarrow	\updownarrow	...	\updownarrow	...	\updownarrow
y_{m+1}	y_{m+2}	...	y_{m+j}	...	y_{m+n}	y_1	y_2	...	y_i	...	y_m
Балансовые переменные						Основные переменные					
Двойственная задача											

Поскольку двойственной к двойственной задаче будет прямая задача, эти методы симметричны относительно прямой и двойственной задач. Данное обстоятельство обуславливает возможность проведения вычислений именно по той задаче (прямой или двойственной), которая требует меньших вычислительных ресурсов (меньший объём вычислений имеет задача с меньшим количеством ограничений). После нахождения оптимального решения решаемой задачи оптимальное решение обратной задачи определяется одним из описанных методов.

Если в процессе решения применялся метод искусственного базиса, то в симплекс-таблице от искусственных переменных избавляться не следует.

2.5. Решение двойственных задач

Пример 2.1. Найти оптимальные решения симметричной пары двойственных задач.

Прямая задача	Двойственная задача
$L = x_1 - x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,2}. \end{cases}$	$S = 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \rightarrow \min$ $\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 \geq 1, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \geq -1, \\ y_i \geq 0, \forall i = \overline{1,3}. \end{cases}$

☺ Решение.

Проведём рассуждения по каждому из приведённых методов.

Метод 1. Решение прямой задачи можно найти графически (рис. 2.1):

$$X_{\text{опт}} = (4; 1), \text{ при этом } L(X_{\text{опт}}) = 4 - 1 = 3.$$

На основании теоремы 2.1 имеем $\max L(X) = \min S(Y) = 3$.

Так как в оптимальном решении прямой задачи 1-я и 2-я компоненты положительны, то 1-е и 2-е ограничения двойственной задачи можно записать в виде равенств:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = -1. \end{cases}$$

Подставим $X_{\text{опт}} = (4; 1)$ в систему ограничений прямой задачи:

$$\begin{cases} -2 \cdot 4 + 1 = -7 < 2, \\ 4 - 2 \cdot 1 = 2, \\ 4 + 1 = 5. \end{cases}$$

Первое из этих ограничений выполняется как строгое неравенство, а остальные как равенства.

Отсюда по теореме 2.3. получаем

$$y_1 = 0, \quad y_2 > 0, \quad y_3 > 0.$$

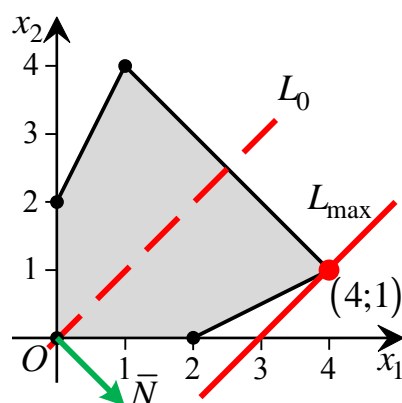


Рис. 2.1

Тогда система ограничений двойственной задачи примет вид:

$$\begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 + y_3 = 1, \\ -2y_2 + y_3 = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = \frac{2}{3}, \\ y_3 = \frac{1}{3}. \end{cases} \Rightarrow Y_{\text{опт}} = \left(0; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Метод 2. Найдём оптимальное решение двойственной задачи, если прямая задача решена симплексным методом. Чтобы подготовить прямую задачу к решению симплекс-методом, необходимо добавить дополнительные балансовые переменные x_3 , x_4 и x_5 в каждое неравенство системы ограничений прямой задачи. Тогда система ограничений принимает вид:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5, \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Результаты расчётов представлены в симплекс-таблице 2.5.

Таблица 2.5

Начальная итерация								
c_j	БП	1	-1	0	0	0	$L(X)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
c_i		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
0	x_3	-2	1	1	0	0	2	—
0	x_4	①	-2	0	1	0	2	$2:1 = 2 - \min$
0	x_5	1	1	0	0	1	5	$5:1 = 5$
$\Delta_j \geq 0$		-1	1	0	0	0	0	Критерий на max не выполнен
Первая итерация								
0	x_3	-2	-3	1	2	0	6	—
1	x_1	1	-2	0	1	0	2	—
0	x_5	0	③	0	-1	1	3	$3:3 = 1$
$\Delta_j \geq 0$		0	-1	0	1	0	2	Критерий на max не выполнен
Вторая итерация								
0	x_3	-2	-3	1	1	1	9	—
1	x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	4	—
-1	x_2	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	—
$\Delta_j \geq 0$		0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	3	Критерий на max выполнен

Таким образом, $X_{\text{опт}} = (4; 1; 9; 0; 0)$, при этом $\max L = 3$.

Заметим, что базисные переменные в оптимальной симплекс-таблице (вторая итерация) в столбце БП записаны в таком порядке: x_3, x_1, x_2 . Поэтому в вектор-строке первоначальных коэффициентов целевой функции коэффициенты этих переменных должны идти в том же порядке:

$$\begin{aligned}
& (\text{вектор коэффициентов}) = \\
& = (\text{коэффициент при } x_3, \text{ коэффициент при } x_1, \text{ коэффициент при } x_2) = \\
& = (c_3, c_1, c_2) = (0; 1; -1).
\end{aligned}$$

Оптимальное решение двойственной задачи вычисляется через произведение матриц:

$$\begin{aligned}
(y_1 \ y_2 \ y_3) &= (\text{вектор коэффициентов}) \times (\text{обратная матрица}) = \\
&= (0 \ 1 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(0 \ \frac{2}{3} \ \frac{1}{3} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, $Y_{\text{опт}} = \left(0; \frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right)$, при этом выполняется равенство основной теоремы двойственности $\min S(Y) = \max L(X) = 3$.

Метод 3. Пусть прямая задача решена симплекс-методом, а двойственная приведена к каноническому виду путём добавления балансовых переменных y_4 и y_5 . Тогда основным переменным прямой задачи соответствуют балансовые переменные двойственной и наоборот (см. табл. 2.4):

Прямая задача	Основные переменные		Балансовые переменные		
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	\updownarrow	\updownarrow	\updownarrow	\updownarrow	\updownarrow
Двойственная задача	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3
	Балансовые переменные		Основные переменные		

Значения y_i определяем по последней строке симплекс-таблицы 2.5:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Δ_j	$y_4 = 0$	$y_5 = 0$	$y_1 = 0$	$y_2 = \frac{2}{3}$	$y_3 = \frac{1}{3}$

Таким образом, $Y_{\text{опт}} = \left(0; \frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right)$, при этом выполняется равенство основной теоремы двойственности $\min S(Y) = \max L(X) = 3$.

Ответ: $X_{\text{опт}} = (4; 1)$, $Y_{\text{опт}} = \left(0; \frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right)$, $\min S(Y) = \max L(X) = 3$. ☺

Пример 2.2. Найти оптимальные решения несимметричной пары двойственных задач.

Прямая задача	Двойственная задача
$L = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,4}. \end{cases}$	$S = 9y_1 + 6y_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 3, \\ -2y_1 + y_2 \leq 1, \\ 3y_1 - 6y_2 \leq 3, \\ -y_1 - y_2 \leq 1. \end{cases}$ y_1, y_2 – произвольные по знаку.

☺ Решение. Решая двойственную задачу графическим методом (рис. 2.2), получим:

$$Y_{\text{опт}} = (0; 5; 2), \text{ при этом } S(Y_{\text{опт}}) = 16,5.$$

$$\min L(X) = \max S(Y) = 16,5.$$

Подставим $Y_{\text{опт}}$ в систему ограничений двойственной задачи:

$$\begin{cases} 2 \cdot 0,5 + 2 = 3, & \Rightarrow x_1 > 0, \\ -2 \cdot 0,5 + 2 = 1, & \Rightarrow x_2 > 0, \\ 3 \cdot 0,5 - 6 \cdot 2 = -10,5 < 3, & \Rightarrow x_3 = 0, \\ -0,5 - 2 = -2,5 < 1. & \Rightarrow x_4 = 0. \end{cases}$$

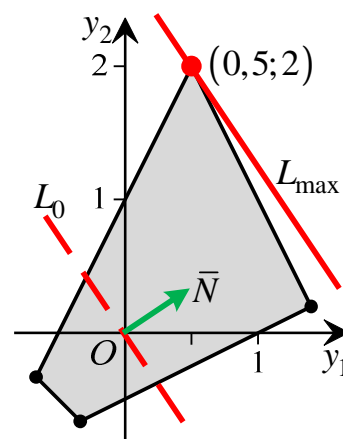


Рис. 2.2

В результате система ограничений прямой задачи примет вид:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 9, \\ x_1 + x_2 = 6, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Решив полученную систему, находим $X_{\text{опт}} = (5,25; 0,75; 0; 0)$, при этом $L(X_{\text{опт}}) = 16,5$.

Рассмотрим теперь решение задачи с использованием обратной матрицы. Предположим, что решение исходной задачи известно:

$$X_{\text{опт}} = (5,25; 0,75; 0; 0), L(X_{\text{опт}}) = 16,5.$$

Тогда решение $Y_{\text{опт}}$ двойственной задачи можно найти по формуле:

$$Y_{\text{опт}} = C \cdot A^{-1},$$

где C – вектор-строка коэффициентов базисных переменных целевой функции в оптимальном решении; A^{-1} – матрица, обратная матрице A ,

которая является матрицей коэффициентов базисных переменных системы ограничений исходной задачи в оптимальном решении.

$$\text{В данном случае } C = (3; 1); A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,5 \\ -0,25 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Отсюда } Y_{\text{опт}} = (3 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0,25 & 0,5 \\ -0,25 & 0,5 \end{pmatrix} = (0,5 \ 2).$$

$$\text{Итак, } Y_{\text{опт}} = (0,5; 2), \text{ при этом } S(Y_{\text{опт}}) = 16,5.$$



Пример 2.3. Найти оптимальные решения смешанной пары двойственных задач.

Прямая задача	Двойственная задача
$L = x_1 - 6x_2 - x_3 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + \quad \quad 3x_3 \leq 4, \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,3}. \end{cases}$	$S = 3y_1 + 4y_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 1, \\ 3y_1 \geq -6, \\ 3y_1 + 3y_2 \geq -1, \\ y_2 \geq 0. \end{cases}$
	величина y_1 – произвольная по знаку.

☺ Решение.

✓ Решение задачи будем проводить симплексным методом, добавив искусственную переменную $t \geq 0$ в первое ограничение и балансовую переменную $x_4 \geq 0$ во второе ограничение прямой задачи. В целевую функцию вводим штраф $-Mt$. Составим симплексную таблицу (табл. 2.6). В процессе решения от искусственной переменной избавляться не следует.

Таблица 2.6

Начальная итерация								
c_j	БП	1	-6	-1	-M	0	$L(X)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
c_i		x_1	x_2	x_3	t	x_4	b_i	
-M	t	1	3	③	1	0	3	$3:3 = 1 - \min$
0	x_4	2	0	3	0	1	4	$4:3 = 4/3$
$\Delta_j \geq 0$		-M-1	6-3M	1-3M	0	0	-3M	Критерий на max не выполнен

Первая итерация								
-1	x_3	$\frac{1}{3}$	1	1	$\frac{1}{3}$	0	1	$1: \frac{1}{3} = 3$
-M	x_4	①	-3	0	-1	1	1	$1: 1 = 1 - \min$
$\Delta_j \geq 0$		$-M - \frac{4}{3}$	$3M + 5$	0	$2M - \frac{1}{3}$	-M	-M-1	Критерий на max не выполнен

Вторая итерация								
-1	x_3	0	2	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	—
1	x_1	1	-3	0	-1	1	1	—
$\Delta_j \geq 0$		0	1	0	$M - \frac{5}{3}$	$M + \frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	Критерий на max не выполнен

Таким образом, $X_{\text{опт}} = \left(1; 0; \frac{2}{3}; 0; 0\right)$, $\max L(X) = \frac{1}{3}$.

Базисные переменные в оптимальной симплекс-таблице (вторая итерация) в столбце БП записаны в порядке: x_3, x_1 . Следовательно, в вектор-строке первоначальных коэффициентов целевой функции коэффициенты этих переменных будут располагаться в том же порядке:

$$(\text{вектор коэффициентов}) = (c_3, c_1) = (-1; 1).$$

Вычисляем оптимальное решение двойственной задачи:

$$\begin{aligned} (y_1 \ y_2) &= (\text{вектор коэффициентов}) \times (\text{обратная матрица}) = \\ &= (-1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \left(-\frac{5}{3} \ \frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, $Y_{\text{опт}} = \left(-\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$, при этом выполняется равенство основной теоремы двойственности $\min S(Y) = \max L(X) = \frac{1}{3}$.

✓ Пусть первоначально было найдено решение двойственной задачи графическим методом (рис. 2.3):

$$Y_{\text{опт}} = \left(-\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right), S(Y_{\text{опт}}) = \frac{1}{3}.$$

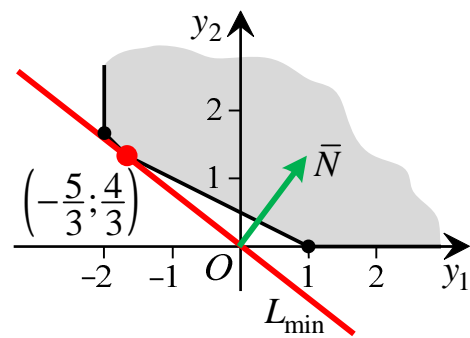


Рис. 2.3

Так как $y_2 \geq 0$, то и 2-е ограничение прямой задачи выполняется в виде равенства:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

Подставим компоненты найденного решения $Y_{\text{опт}} = \left(-\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$ в систему ограничений двойственной задачи:

$$\begin{cases} -\frac{5}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 1, & \Rightarrow x_1 > 0, \\ 3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = -5 > -6, & \Rightarrow x_2 = 0, \\ 3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 3 \cdot \frac{4}{3} = -1. & \Rightarrow x_3 > 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем систему для нахождения компонент оптимального решения прямой задачи:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

Решая её, получим $X_{\text{опт}} = \left(1; 0; \frac{2}{3}\right)$.

При этом $\max L(X) = \min S(Y) = \frac{1}{3}$.



2.6. Экономический анализ задач ЛП с использованием теории двойственности

Прямая задача	Двойственная задача
$L(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$	$S(Y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min$
$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m},$	$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, n},$
$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$	$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$

Исходя из экономических представлений, задача максимизации отображает результаты от реализации n видов экономической (производственной) деятельности при имеющихся m видах ресурсов.

Экономическая интерпретация задачи максимизации:

Производителю необходимо составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль от её реализации будет максимальной, и потребление ресурсов не превзойдёт имеющихся запасов.

Таким образом, система ограничений несёт информацию о нормах расходования (a_{ij}) единиц i -го ресурса на производство единицы j -го вида продукции, максимальные запасы этого i -ого ресурса ограничены величиной b_i ; коэффициент c_j целевой функции представляет собой прибыль на единицу продукции j -го вида экономической деятельности.

Для любой пары допустимых решений прямой (на максимум) и двойственной (на минимум) задач значения (конечные) их целевых функций удовлетворяют неравенству:

$$L(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i = S(Y).$$

По первой теореме двойственности только для оптимальных планов пары двойственных задач справедливо равенство: $L(X) = S(Y)$.

Рассмотрим сначала вариант оптимума, т. е. когда $L(X_{\text{опт}}) = S(Y_{\text{опт}})$.

L – соответствует величине дохода (ден. ед.);

b_i – общее доступное количество ресурса i .

Так как доход равен количеству продаваемого продукта, умноженному на его цену, то равенство $L = S = \sum_{i=1}^m b_i y_i$ можно представить:

Доход (ден. ед.) =

$$= \sum_{i=1}^m (\text{количество ресурса } i) \times (\text{стоимость (ден. ед.) единицы } i\text{-го ресурса}).$$

Это означает, что переменная y_i двойственной задачи должна представлять стоимость единицы ресурса i (глава 1, п.1.7.5, III). Тогда равенство целевых функций для оптимальных планов говорит о равенстве прибыли затратам.

При любых других соответствующих допустимых планах прибыль будет меньше затрат. Неравенство $L < S$ можно интерпретировать следующим образом:

Доход < Общая стоимость ресурсов.

Это соотношение показывает, что до тех пор, пока суммарный доход от всех видов деятельности строго меньше суммарной стоимости всех используемых ресурсов, решение как прямой, так и двойственной задачи не может быть оптимальным. Оптимум (максимальный доход) может быть достигнут только тогда, когда все потребляемые ресурсы использованы полностью.

Экономическая интерпретация задачи минимизации:

Покупателю необходимо найти такой набор цен (оценок) ресурсов, имеющихся у производителя, при котором затраты на приобретение этих ресурсов будут минимальны, а производитель получит при этом прибыль не менее той, какую бы он получил при производстве и сбыте готовой продукции.

Если модель ЛП рассматривать как модель системы, имеющую “вход” и “выход”, то потребляемые ресурсы характеризуют “вход” этой системы, а получаемый доход – её “выход”. Система будет находиться в неустойчивом (неоптимальном) состоянии, пока вход превышает выход. Устойчивое состояние системы характеризуется равенством входа и выхода.

2.7. Устойчивость двойственных оценок

Мы уже встречались с анализом устойчивости в главе 1 (при графическом методе решения задачи ЛП). Рассмотрим аналитические методы анализа устойчивости для исходной задачи ЛП:

$$L = C \cdot X \rightarrow \text{extr}, \quad \begin{cases} A \cdot X = B, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Теорема 2.4. (Связь приращения целевой функции с изменениями запаса)

При изменении запаса i -го ресурса на величину Δb_i оптимум целевой функции получает приращение

$$\Delta L = \Delta b_i \cdot y_i, \quad (2.10)$$

где y_i – ООО компоненты x_i оптимального плана.

► Пусть X^* , Y^* – соответствующие оптимальные планы пары двойственных задач:

$$L_{\text{опт}} = L(X^*) = C \cdot X^*, \quad S_{\text{опт}} = S(Y^*) = B \cdot Y^*.$$

По 1-й теореме двойственности:

$$L_{\text{опт}} = S_{\text{опт}};$$

$$L(X^*) = B \cdot Y^* = b_1 \cdot y_1 + \dots + b_m \cdot y_m.$$

Пусть запас i -го ресурса изменился на величину Δb_i .

Тогда оптимум функции L потерпит изменение на величину ΔL .

Будем считать, что ООО ресурсов остались без изменения, тогда новый оптимум функции S :

$$S_{\text{опт}} = b_1 \cdot y_1 + \dots + (b_i + \Delta b_i) \cdot y_i + \dots + b_m \cdot y_m.$$

Приравнявая новые оптимумы, получаем:

$$L(X^*) + \Delta L = b_1 \cdot y_1 + \dots + (b_i + \Delta b_i) \cdot y_i + \dots + b_m \cdot y_m$$

$$b_1 \cdot y_1 + \dots + b_i \cdot y_i + \dots + b_m \cdot y_m + \Delta L = b_1 \cdot y_1 + \dots + (b_i + \Delta b_i) \cdot y_i + \dots + b_m \cdot y_m$$

$$\Delta L = \Delta b_i \cdot y_i \quad \blacksquare$$

При доказательстве теоремы мы считали, что структура оптимального плана не менялась (т. е. цены на ресурсы – набор ООО $Y = (y_1; y_2; \dots; y_m)$ сохранялся). Это возможно только в том случае, когда изменение запасов ресурсов находится в рамках интервалов устойчивости двойственных оценок.

Интервалы устойчивости двойственных оценок определяются из решения неравенства:

$$(A^*)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ \dots \\ b_m + \Delta b_m \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

где $(A^*)^{-1}$ – матрица координат исходных базисных векторов в новом базисе (последняя итерация симплекс-таблицы).

Интервал для возможного приращения Δb_i – находится из (2.11) при прочих $\Delta b_k = 0$:

$$\Delta b_i^H \leq \Delta b_i \leq \Delta b_i^B.$$

Очевидно, что $\Delta b_i^H \leq 0$ ($0 \leq \Delta b_i^B$), поскольку величина Δb_i^H (Δb_i^B) соответствует максимальному уменьшению (увеличению) значения b_i .

Т.о. значение запаса i -го ресурса должно принадлежать интервалу устойчивости двойственных оценок:

$$[b_i + \Delta b_i^H; b_i + \Delta b_i^G],$$

где b_i – исходный запас i -го ресурса.

Рассмотрим ситуацию, когда несколько ресурсов одновременно терпят изменения на величину Δb_i . Положим $p_i = \Delta b_i / \Delta b_i^H$ для отрицательных приращений Δb_i или $p_i = \Delta b_i / \Delta b_i^B$ для положительных приращений Δb_i . Таким образом, $0 \leq p_i \leq 1$.

Достаточное правило допустимости изменения запасов ресурсов гласит, что при изменении запасов ресурсов на величины $\Delta b_1, \Delta b_2, \dots, \Delta b_m$ достаточным условием того, что текущее решение останется допустимым, будет выполнение неравенства

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m \leq 1. \quad (2.12)$$

Если это условие не выполняется, то текущее решение может быть как допустимым, так и недопустимым. Сформулированное правило неприменимо, если Δb_i выходят из своих интервалов допустимости.

Если измененные запасы ресурсов попадают в интервалы устойчивости двойственных оценок, и выполняется условие (2.12), то *новый оптимальный план* определяется по формуле:

$$X^*_{\text{опт}} = X_{\text{опт}} + (A^*)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \dots \\ \Delta b_m \end{pmatrix}.$$

Обобщение теоремы 2.4. При изменении запасов нескольких ресурсов на величины Δb_i ($i = \overline{1, m}$) оптимум целевой функции получает приращение:

$$\Delta L = \sum_{i=1}^n \Delta b_i y_i, \quad (2.13)$$

где y_i – $ООО$ компонент оптимального плана.

Достаточное правило допустимости изменения цен

Правило, подобное достаточному правилу допустимости изменения запасов ресурсов, можно сформулировать и для одновременного изменения коэффициентов c_j целевой функции на величину Δc_j . Предположим, что для всех изменений Δc_j получены интервалы для приращений j -цен

$$\Delta c_j^H \leq \Delta c_j \leq \Delta c_j^B,$$

сохраняющих оптимальность текущего решения. Очевидно, что $\Delta c_j^H \leq 0$ ($0 \leq \Delta c_j^B$), поскольку эта величина соответствует максимально возможному уменьшению (увеличению) коэффициента c_j , сохраняющего текущее оптимальное решение.

Определим отношение $q_j = \Delta c_j / \Delta c_j^H$ или $q_j = \Delta c_j / \Delta c_j^B$ в зависимости от того, будет величина Δc_j отрицательной или положительной. По определению $0 \leq q_j \leq 1$.

Правило гласит, что *достаточным условием сохранения оптимальности текущего решения является выполнение неравенства*

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n \leq 1.$$

Если это неравенство не выполняется, то текущее решение может быть как оптимальным, так и неоптимальным. Это правило не применимо, если величины Δc_j выходят за свои интервалы оптимальности.

2.8. Экономическая интерпретация двойственных оценок

ООО как мера влияния ограничений на оптимум

При увеличении i -го ресурса на единицу ($\Delta b_i = 1$) оптимум целевой функции получает приращение $\Delta L = \Delta b_i \cdot y_i = 1 \cdot y_i = y_i$.

Т.е. величина ООО ресурса (y_i) показывает, насколько изменилось бы значение целевой функции при единичном изменении запасов данного ресурса.

Значения переменных y_i в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов системы ограничений исходной задачи на оптимальное значение её целевой функции.

Это позволяет выявить направление мероприятий по устранению так называемых «узких» мест, обеспечивая тем самым наиболее выгодную экономическую эффективность, а также целесообразность изменений в структуре выпуска продукции с позиции общего оптимума.

ООО как скорость изменения оптимального дохода

При малых ΔL_i и Δb_i примем $\partial L_i = \Delta L_i$, $\partial b_i = \Delta b_i$, тогда

$$\Delta L_i \approx y_i \cdot \Delta b_i \text{ или } \partial L_i \approx y_i \cdot \partial b_i$$

примет вид:

$$y_i \approx \frac{\partial L_i}{\partial b_i}.$$

Таким образом, y_i , представляя собой частную производную оптимального дохода по i -му ресурсу, характеризует скорость изменения оптимального дохода при изменении i -го ресурса.

ООО как цена ресурса

При изменении i -го ресурса оптимальный доход является линейной функцией от приращения этого ресурса, причём коэффициентом служит y_i – i -я компонента оптимального решения двойственной задачи.

Таким образом, переменную y_i считают некоторой характеристикой ценности i -го ресурса (условной ценой ресурса).

ООО как мера дефицитности ресурсов

- Если $y_i = 0$, то при увеличении i -го ресурса оптимальный доход остаётся неизменным, значит ценность этого ресурса равна нулю. В самом деле, сырьё, запасы которого превышают потребность в нём, не представляют ценности для производства и его оценку можно принять за нуль.
- Если y_i мало, то значительному увеличению i -го ресурса будет соответствовать небольшое увеличение оптимального дохода, т. е. ценность ресурса невелика.
- Если y_i велико, то незначительному увеличению i -го ресурса будет соответствовать существенное увеличение оптимального дохода, т. е. ценность ресурса высока, а его уменьшение приведёт к существенному сокращению выпуска продукции.

Т.о. величина ООО каждого ресурса (y_i) в сравнении с другими показывает степень дефицитности соответствующего ресурса.

- Чем больше значение ООО, тем более дефицитным является ресурс.
- Недефицитные ресурсы имеют нулевую оценку.

ООО как инструмент определения эффективных вариантов выпуска продукции

Введение в модель нового вида производственной деятельности эквивалентно добавлению новой переменной в задачу ЛП. Добавление нового вида производственной деятельности интуитивно обосновано только в том случае, если эта деятельность экономически рентабельна, т. е. улучшает оптимальное значение целевой функции. В новый оптимальный план может быть включён лишь тот вид продукции, для которого прибыль, не дополученная из-за перераспределения ресурсов a_{ik} на производство этого варианта, покрывается прибылью этого варианта:

— выпуск нового k -го вида продукции эффективен, если

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i=1}^m a_{ik} \cdot y_i > 0;$$

— выпуск нового k -го вида продукции не эффективен, если

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i=1}^m a_{ik} \cdot y_i < 0.$$

Глава 3. Общая задача нелинейного программирования

Во многих экономических задачах зависимости между факторами можно считать линейными лишь в первом приближении. Более детальное рассмотрение позволяет обнаружить их нелинейность.

В общем случае *задача нелинейного программирования* (НП) формулируется так же как и задача ЛП:

— необходимо найти такой набор неизвестных $(x_1; x_2; \dots; x_n)$, чтобы оптимизировать функцию $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ при ограничениях вида:

$$\begin{cases} g_i(x_1; x_2; \dots; x_n) \geq 0, & i = \overline{1, m}; \\ h_j(x_1; x_2; \dots; x_n) = 0, & j = \overline{1, k}. \end{cases}$$

Но в общей задаче НП для целевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ или функций системы ограничений $g_i(x_1, x_2, \dots, x_k)$, $h_j(x_1, x_2, \dots, x_k)$ *нарушены условия линейности*.

Определение. *Нелинейное программирование* (НП) – это раздел математического программирования, изучающий методы нахождения экстремальных (наибольших и наименьших) значений функции конечного числа переменных, на которые наложены ограничения. При этом целевая функция или система ограничений содержит выражения, нелинейные относительно искомых величин.

Все основные понятия задачи НП аналогичны понятиям задачи ЛП.

В отличие от задач ЛП для задач НП нет единого метода решения. В зависимости от вида целевой функции и ограничений разработаны не-

В задачах НП требуется определить глобальный экстремум целевой функции, который выбирается из значений локальных экстремумов и условных экстремумов целевой функции на границе замкнутой области допустимых решений. Наличие локальных экстремумов затрудняет решение задачи, так как большая часть существующих методов НП не позволяет установить, является ли найденный экстремум локальным или глобальным.

3.1.1. Графический способ решения

[illegible]

$$Z(X) = \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n}{d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + \dots + d_nx_n} \quad (3.2)$$

где a_{ij}, b_i, c_j, d_j – заданные постоянные величины, $\sum_{j=1}^n d_j x_j \neq 0$.

$$Z(X) = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \rightarrow \text{extr} \quad \text{при ограничениях} \begin{cases} a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Из выражения линии уровня целевой функции при $Z = Z_0$ получаем:

$$(d_1x_1 + d_2x_2)Z_0 = c_1x_1 + c_2x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{c_1 - d_1Z_0}{d_2Z_0 - c_2} \cdot x_1.$$

Таким образом, линия уровня целевой функции определяется уравнением прямой $x_2 = k \cdot x_1$ с угловым коэффициентом $k = \frac{c_1 - d_1Z_0}{d_2Z_0 - c_2}$.

Полученное уравнение задаёт прямую, проходящую через начало координат. Изменение положения такой прямой на плоскости определяется только её угловым коэффициентом k . Установим, как будет себя вести угловой коэффициент при изменении значений Z_0 . Для этого продифференцируем выражение для k по Z_0 :

$$k'_{Z_0} = \left(\frac{c_1 - d_1Z_0}{d_2Z_0 - c_2} \right)'_{Z_0} = \frac{-d_1(d_2Z_0 - c_2) - d_2(c_1 - d_1Z_0)}{(d_2Z_0 - c_2)^2} = \frac{d_1c_2 - d_2c_1}{(d_2Z_0 - c_2)^2}.$$

Очевидно, что полученная производная k'_{Z_0} имеет постоянный знак, который не зависит от изменения Z_0 . Следовательно, при увеличении Z_0 угловой коэффициент k линии уровня целевой функции будет только убывать или только возрастать, а линия уровня будет поворачиваться только в одну сторону – по часовой стрелке ($k < 0$) или против ($k > 0$).

3.1.2. Экономическая интерпретация задач ДЛП

Введём обозначения:

- r_j – прибыль предприятия от реализации единицы продукции j -го вида;
- x_j – количество выпущенной продукции j -го вида;
- s_j – цена единицы продукции j -го вида;
- c_j – себестоимость производства единицы продукции j -го вида;
- d_j – затраты на производство единицы продукции j -го вида.

Тогда целевые функции экономических задач ДЛП примут вид:

Задача рентабельности (P) производства продукции:	$P = \frac{\sum r_j x_j}{\sum c_j x_j} \rightarrow \max$
Задача определения затрат ($З_p$) в расчёте на 1 рубль товарной продукции:	$З_p = \frac{\sum r_j x_j}{\sum c_j x_j} \rightarrow \min$
Задача нахождения средней себестоимости (c) продукции:	$c = \frac{\sum d_j x_j}{\sum x_j} \rightarrow \min$

Пример 3.1. Для производства двух видов продукции P_1, P_2 используют оборудование трёх типов S_1, S_2, S_3 . Имеются данные:

Вид изделия	Затраты времени на обработку единицы продукции (ч)			Затраты на производство одного изделия, тыс. руб.
	S_1	S_2	S_3	
P_1	2	1	12	2
P_2	8	1	3	3

Известно, что оборудование типов S_1, S_3 можно использовать не более 26 ч и 39 ч соответственно, а оборудование типа S_2 – не менее 4 ч.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы себестоимость одного изделия была минимальной?

☺ Решение. Введём переменные x_j ($j=1,2$) – количество единиц производимой продукции типа P_j . Тогда

– общие затраты на их производство: $Z = 2x_1 + 3x_2$ тыс. руб.;

– средняя себестоимость единицы изделия: $c = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2}$.

Математическая постановка задачи. Необходимо найти такой план выпуска продукции $X = (x_1; x_2)$, удовлетворяющий условиям:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \leq 26, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ 12x_1 + 3x_2 \leq 39, \\ x_j \geq 0, \quad \forall j=1,2. \end{cases}$$

чтобы значение функции $c = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2}$ было минимальным.

Преобразуем уравнение линии уровня целевой функции:

$$c_0 = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{c_0 - 2}{3 - c_0} \cdot x_1.$$

Продифференцируем угловой коэффициент полученной прямой и определим знак производной:

$$k' = \left(\frac{c_0 - 2}{3 - c_0} \right)' = \frac{1 \cdot (3 - c_0) + 1 \cdot (c_0 - 2)}{(3 - c_0)^2} = \frac{1}{(3 - c_0)^2} > 0.$$

Т. к. производная положительна, то угловой коэффициент линии уровня есть возрастающая функция от переменной c_0 , что соответствует вра-

щению линии уровня против часовой стрелки. Следовательно, в точке C области допустимых решений ($\square ABC$) целевая функция будет принимать наименьшее значение.

Координаты т. C определяются пересечением прямых, соответствующих 2-му и 3-му ограничениям системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ 12x_1 + 3x_2 = 39. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow C(3; 1).$$

Значение оптимума:

$$c_{\min} = c(3; 1) = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \Big|_{(3; 1)} = \frac{9}{4}.$$

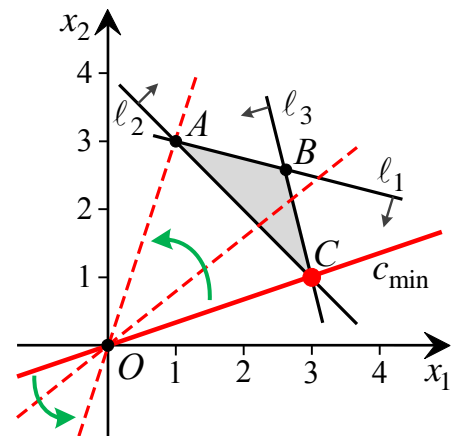


Рис. 3.5.

Ответ: $c_{\min} = c(3; 1) = \frac{9}{4}$. 😊

3.1.3. Решение задач ДЛП симплекс-методом

При введении новых переменных

$$y_j = y_0 x_j, \text{ где } y_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} \neq 0$$

в (3.1) и (3.2) задача ДЛП примет линейный вид:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j y_j \rightarrow \text{extr} \quad \text{при ограничениях} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0, \\ \sum_{j=1}^n d_j y_j = 1, \\ y_0 > 0, \\ y_j \geq 0, \quad \forall j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Пример 3.2. Найти решение $X_{\text{опт}}$ задачи ДЛП:

$$Z = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \max, \text{ если } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 4. \end{cases}$$

☺ Решение. Введём обозначения и преобразуем исходную задачу:

$$y_0 = \frac{1}{x_1 + 2x_2 + 1}, \quad y_1 = y_0 x_1, \quad y_2 = y_0 x_2, \quad y_3 = y_0 x_3, \quad y_4 = y_0 x_4;$$

$$Z = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} = \frac{2x_1}{x_1 + 2x_2 + 1} - \frac{x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} = 2x_1 y_0 - x_2 y_0 = 2y_1 - y_2;$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 4. \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{y_1}{y_0} - 2 \cdot \frac{y_2}{y_0} + \frac{y_3}{y_0} = 2, \\ 2 \cdot \frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \frac{y_4}{y_0} = 6, \\ y_1 + 2y_2 + y_0 = 1, \\ y_0 > 0, \quad y_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 4. \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} y_1 - 2 \cdot y_2 + y_3 = 2y_0, \\ 2 \cdot y_1 + y_2 + y_4 = 6y_0, \\ y_1 + 2y_2 + y_0 = 1, \\ y_0 > 0, \\ y_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 4. \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -2y_0 + y_1 - 2y_2 + y_3 = 0, \\ -6y_0 + 2 \cdot y_1 + y_2 + y_4 = 0, \\ y_0 + y_1 + 2y_2 = 1, \\ y_0 > 0, \\ y_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Полученную задачу ЛП:

$$Z = 2y_1 - y_2 \rightarrow \max \text{ при ограничениях } \begin{cases} -2y_0 + y_1 - 2y_2 + y_3 = 0, \\ -6y_0 + 2y_1 + y_2 + y_4 = 0, \\ y_0 + y_1 + 2y_2 = 1, \\ y_0 > 0, \\ y_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 4. \end{cases}$$

решим симплекс-методом.

Начальная итерация								
c_j	БП	0	2	-1	0	0	$Z(Y)$	$Q_i = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$
c_i		y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	b_i	
0	y_3	-2	1	-2	1	0	0	—
0	y_4	-6	2	1	0	1	0	—
0	y_0	①	1	2	0	0	1	1:1=1
$\Delta_j \geq 0$		0	-2	1	0	0	0	Критерий на max не выполнен
Первая итерация								
0	y_3	0	③	2	1	0	2	$2:3 = \frac{2}{3} - \min$
0	y_4	0	8	13	0	1	6	$6:8 = \frac{3}{4}$
0	y_0	1	1	2	0	0	1	1:1=1
$\Delta_j \geq 0$		0	-2	1	0	0	0	Критерий на max не выполнен
Вторая итерация								
2	y_1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	
0	y_4	0	0	$\frac{13}{3}$	$-\frac{8}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	
0	y_0	1	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	
$\Delta_j \geq 0$		0 БП	0 БП	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	0 БП	$\frac{4}{3}$	Критерий на max выполнен

Из последней итерации определяем

$$Y_{\text{опт}} = (y_0; y_1; y_2; y_3; y_4) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0; 0; \frac{2}{3} \right), \quad Z_{\text{max}} = \frac{4}{3}.$$

Возвращаясь к замене, получим

$$X_{\text{опт}} = (x_1; x_2; x_3; x_4) = (2; 0; 0; 2).$$

$$\text{Ответ: } Z_{\text{max}} = Z(2; 0; 0; 2) = \frac{4}{3}. \quad \text{☺}$$

3.2. Графический метод решения задач нелинейного программирования на плоскости

Отметим, что в отличие от задач ЛП, где точками экстремума являются вершины многогранника решений, в задачах с нелинейной целевой функцией эти точки могут находиться внутри многогранника решений, на его ребре или в вершине.

Алгоритм графического метода решения задач НП

(аналогичен алгоритму решения задачи ЛП)

1. Находим область допустимых решений из системы ограничений. Если ОДР является пустым множеством, то задача НП неразрешима ввиду несовместности системы ограничений.
3. Если ОДР является непустым множеством, то строим линию уровня Z_0 целевой функции.
2. Определяем направление роста (убывания) целевой функции.
4. Находим точку ОДР, через которую проходит линия уровня Z_0 с наибольшим (наименьшим) значением, или устанавливаем неограниченность целевой функции на ОДР.
5. Находим координаты точки экстремума и соответствующее значение целевой функции.

Рассмотрим примеры решения задач НП с двумя переменными.

Пример 3.3. Найти решение задачи НП:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \text{extr}, \text{ если: } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 x_2 \geq 1, \\ x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2. \end{cases}$$

☺ Решение. Область допустимых решений ограничена гиперболой $x_2 = \frac{1}{x_1}$ и прямой $x_1 + x_2 = 4$ (рис. 3.1).

Линии уровня целевой функции:

$$2x_1 + 3x_2 = \text{const}$$

определяют семейство параллельных прямых с вектором нормали $\bar{N} = \{2; 3\}$.

Наибольшее значение целевая функция Z принимает в точке A пересечения граничной прямой и гиперболы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 x_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow A(2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}),$$

$$Z_{\max} = Z(A) = 10 + \sqrt{3}.$$

Наименьшее значение целевая функция Z принимает в точке C – точке касания линии уровня с гиперболой.

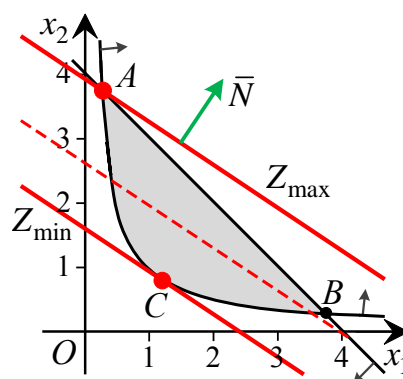


Рис. 3.1.

Продифференцируем уравнение гиперболы по переменной x_1 :

$$x_2' = -\frac{1}{x_1^2}.$$

Приравняем полученное выражение к тангенсу угла наклона линии уровня $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{\text{const}}{3}$, которой принадлежит искомая точка C :

$$\begin{cases} -\frac{1}{x_1^2} = -\frac{2}{3}, \\ x_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Находим координаты точки C :

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}, \\ x_2 = \frac{1}{x_1} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

$$\text{Значение оптимума: } Z_{\min} = Z(C) = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} + 3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.$$

$$\text{Ответ: } Z_{\min} = Z\left(\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 2\sqrt{6};$$

$$Z_{\max} = Z(2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}) = 10 + \sqrt{3}. \quad \text{☺}$$

Пример 3.4. Найти решение задачи НП:

$$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2 \rightarrow \text{extr, если } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2. \end{cases}$$

☺ Решение. Система ограничений задаёт область допустимых решений – четырёхугольник $ABDE$ (рис. 3.2).

Линии уровня целевой функции:

$$Z_0 = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2$$

– концентрические окружности с центром в точке $C(4;1)$ и радиусами $R = \sqrt{Z_0}$.

1) Целевая функция Z принимает минимальное значение в точке $C(4;1)$ при наименьшем радиусе $R = \sqrt{Z_0} = 0$. Тогда:

$$X_{\min} = (4;1), \quad Z_{\min} = (4-4)^2 + (1-1)^2 = 0.$$

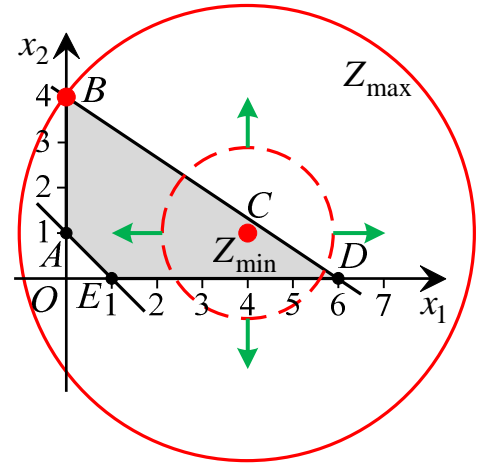


Рис. 3.2.

2) Максимальное значение целевой функции при наибольшем радиусе $R = \sqrt{Z_0}$ линии уровня можно найти перебором (в простейших случаях) значений целевой функции в угловых точках многоугольника решений:

$$Z(A) = Z(0;1) = (0-4)^2 + (1-1)^2 = 16,$$

$$Z(B) = Z(0;4) = (0-4)^2 + (4-1)^2 = 25, \quad \text{– наибольшее.}$$

$$Z(D) = Z(6;0) = (6-4)^2 + (0-1)^2 = 5,$$

$$Z(E) = Z(1;0) = (1-4)^2 + (0-1)^2 = 10.$$

Ответ: $Z_{\max} = Z(0;4) = 25$; $Z_{\min} = Z(4;1) = 0$. ☺

Пример 3.5. Найти решение задачи НП:

$$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \text{extr}, \text{ если: } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2. \end{cases}$$

☺ Решение. Система ограничений задаёт область допустимых решений – четырёхугольник $ABDE$ (рис. 3.3).

Линии уровня целевой функции:

$$Z_0 = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2$$

– концентрические окружности с центром в точке $C(4;6)$ и радиусами $\sqrt{Z_0}$.

Целевая функция Z принимает максимальное значение в точке E и минимальное в точке K (наибольший и наименьший радиусы опорных окружностей).

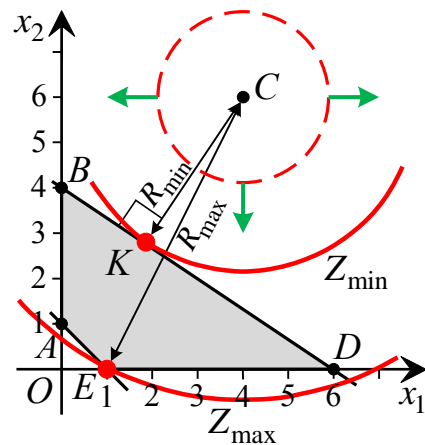


Рис. 3.3.

Определим координаты точек оптимума и соответствующие значения функции.

1) $X_{\max} = E = (1; 0)$, $Z_{\max} = (1-4)^2 + (0-6)^2 = 45$.

2) Для нахождения точки K продифференцируем выражение линии уровня целевой функции как неявную функцию от переменной x_1 :

$$\begin{aligned} \left[(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \right]_{x_1}' &= 0, \\ 2(x_1 - 4) + 2(x_2 - 6) \cdot x_2' &= 0, \\ x_2' &= -\frac{x_1 - 4}{x_2 - 6}. \end{aligned}$$

Приравняем полученное выражение производной к тангенсу угла наклона граничной прямой BP : $x_2 = 4 - \frac{2}{3}x_1$, которой принадлежит искомая точка K :

$$-\frac{x_1 - 4}{x_2 - 6} = -\frac{2}{3}.$$

Найдём координаты точки K , решив систему:

$$\begin{cases} -\frac{x_1 - 4}{x_2 - 6} = -\frac{2}{3}, \\ x_2 = 4 - \frac{2}{3}x_1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x_1 - 4) = 2\left(4 - \frac{2}{3}x_1 - 6\right), \\ x_2 = 4 - \frac{2}{3}x_1. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - 12 = -4 - \frac{4}{3}x_1, \\ x_2 = 4 - \frac{2}{3}x_1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{24}{13}, \\ x_2 = 4 - \frac{2}{3}x_1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{24}{13}; \frac{36}{13}\right), \quad Z_{\min} = Z\left(\frac{24}{13}; \frac{36}{13}\right) = \frac{196}{13}.$$

Ответ: $Z_{\max} = Z(1; 0) = 45$;

$Z_{\min} = Z\left(\frac{24}{13}; \frac{36}{13}\right) = \frac{196}{13}$. ☺

Пример 3.6. Найти решение задачи НП:

$$Z = 2x_1^2 - x_2 \rightarrow \max, \text{ если } \begin{cases} x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 - x_1x_2 \geq 0, \\ x_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2. \end{cases}$$

☺ Решение. Область допустимых решений $OABCD$ ограничена прямыми $x_1 - x_2 = 2$, $x_2 = 4$, гиперболой $x_2 = \frac{x_1}{x_1 - 1}$ и осями координат Ox_1 , Ox_2 (рис. 3.4). Линии уровня целевой функции – семейство парабол $x_2 = 2x_1^2 - Z_0$.

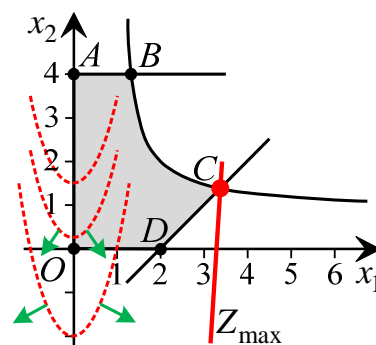


Рис. 3.4.

При увеличении Z_0 линии уровня смещаются вниз. Следовательно, перемещая параболу вниз (в направлении возрастания целевой функции), получим, что линия уровня покидает ОДР через точку C – пересечения гиперболы $x_2 = \frac{x_1}{x_1 - 1}$ и прямой $x_1 - x_2 = 2$. Решая совместно эти уравнения, получим

$$x_1 - 2 = \frac{x_1}{x_1 - 1} \Rightarrow x_1^2 - 4x_1 + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \pm \sqrt{2}.$$

С учётом расположения т. C (рис.3.4), выбираем $x_1 = 2 + \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$.

Значение оптимума: $Z_{\max} = Z(2 + \sqrt{2}; \sqrt{2}) = 12 + 7\sqrt{2}$.

Ответ: $Z_{\max} = Z(2 + \sqrt{2}; \sqrt{2}) = 12 + 7\sqrt{2}$. ☺

3.3. Метод множителей Лагранжа решения задач НП

Дана задача нелинейного программирования – оптимизировать целевую функцию $Z = f(x_1; x_2)$ при условии $g(x_1; x_2) = 0$, где f , g – непрерывные функции вместе со своими частными производными до 2-го порядка включительно по переменным x_j , $j = 1, 2$. Т.е. имеем задачу на отыскание условного экстремума функции $f(x_1; x_2)$.

В точке условного экстремума линия уровня $Z = Z_0$ целевой функции касается линии уравнения связи переменных, т.е. совпадают касательные к графикам функций $f(x_1; x_2) = Z_0$ и $g(x_1; x_2) = 0$. Следовательно, градиенты функций $f(x_1; x_2)$ и $g(x_1; x_2)$ в точке условного экстремума коллинеарны, т.е. их координаты пропорциональны:

$$\frac{f'_{x_1}}{g'_{x_1}} = \frac{f'_{x_2}}{g'_{x_2}}.$$

Обозначим $\frac{f'_{x_1}}{g'_{x_1}} = \frac{f'_{x_2}}{g'_{x_2}} = -\lambda$ – неопределённый множитель Лагранжа.

Тогда условие коллинеарности векторов можно записать в виде:

$$\begin{cases} \frac{f'_{x_1}}{g'_{x_1}} = -\lambda, \\ \frac{f'_{x_2}}{g'_{x_2}} = -\lambda, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_{x_1} + \lambda \cdot g'_{x_1} = 0, \\ f'_{x_2} + \lambda \cdot g'_{x_2} = 0. \end{cases}$$

Для определения значений x_1, x_2 , при которых целевая функция достигает экстремума, к этим уравнениям необходимо добавить условие принадлежности точки экстремума графику функции $g(x_1, x_2) = 0$.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda \cdot g(x_1, x_2).$$

Для определения оптимального решения $X_0 = (x_1^0, x_2^0)$ составим систему уравнений, удовлетворяющую необходимому условию оптимума:

$$\begin{cases} L'_{x_1} = f'_{x_1} + \lambda \cdot g'_{x_1} = 0, \\ L'_{x_2} = f'_{x_2} + \lambda \cdot g'_{x_2} = 0, \\ L'_\lambda = g(x_1; x_2) = 0. \end{cases}$$

Вычислим в точке X_0 значения

$$A = L''_{x_1 x_1} \Big|_{X_0}, \quad B = L''_{x_1 x_2} \Big|_{X_0}, \quad C = L''_{x_2 x_2} \Big|_{X_0}.$$

Обозначим: $\Delta = AC - B^2$.

Тогда:

- если $\Delta > 0$ и $A > 0$, то X_0 – точка минимума целевой функции;
- если $\Delta > 0$ и $A < 0$, то X_0 – точка максимума целевой функции;
- если $\Delta < 0$, то X_0 не является точкой экстремума;
- если $\Delta = 0$, то экстремум в точке X_0 может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Замечание: если вторые частные производные не содержат параметр λ , то $\Delta(L) = \Delta(f)$. Т. е. процесс нахождения условного экстремума вырождается в процесс нахождения локального (абсолютного) экстремума функции $f(x_1, x_2)$, что не приемлемо. В этом случае применяют общую теорему

достаточного условия: $\begin{cases} d^2 L \geq 0 - ? \\ d^2 L \leq 0 - ? \end{cases}$

Рассмотрим процесс исследования **в общем случае** для целевой функции $f(x_1; x_2; \dots; x_k)$ при ограничениях $g_i(x_1; x_2; \dots; x_k) = 0$, $i = \overline{1, m}$, где $f, g_i (i = \overline{1, m})$ – непрерывны вместе со своими частными производными.

Алгоритм метода

Шаг 1. Составить функцию Лагранжа

$$L(x_1; x_2; \dots; x_k; \lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_m) = f(x_1; x_2; \dots; x_k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(x_1; x_2; \dots; x_k).$$

Шаг 2. Решая систему

$$\begin{cases} L'_{x_i} = f'_{x_i} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g'_{x_i} = 0, & i = \overline{1, m}, \\ g_i(x_1; x_2; \dots; x_k) = 0, & i = \overline{1, m}, \end{cases}$$

найти стационарную точку $X_0 = (x_1^0; x_2^0; \dots; x_k^0)$.

Шаг 3. Проверить наличие условного экстремума в найденной точке X_0 .

Пример 3.7. Фирма продаёт автомобили через магазин и через торговых агентов в количествах x_1 и x_2 штук соответственно. Суммарные расходы на реализацию автомобилей определяются функцией $R = 4x_1 + x_1^2 + x_2^2$. Найти оптимальный план $X = (x_1; x_2)$ реализации автомобилей, минимизирующий суммарные расходы, если общее число автомобилей, предназначенных для продажи, составляет 200 штук.

☺ Решение. Решим задачу методом Лагранжа и графическим методом. Математическая постановка задачи. Необходимо найти план выпуска продукции $X = (x_1; x_2)$, минимизирующий значение целевой функции

$$R = 4x_1 + x_1^2 + x_2^2$$

и удовлетворяющий условиям-ограничениям:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 200, \\ x_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2. \end{cases}$$

Составим функцию Лагранжа

$$L(x_1; x_2; \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + x_2^2 + \lambda \cdot (200 - x_1 - x_2).$$

Найдём её частные производные и, приравняв их к нулю, найдём стационарную точку:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 200 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 99, \\ x_2 = 101, \\ \lambda = 202. \end{cases}$$

Проверим наличие условного экстремума в найденной точке. Для этого вычислим значения:

$$A = L''_{x_1 x_1} \Big|_{(99;101;202)} = 2, \quad B = L''_{x_1 x_2} \Big|_{(99;101;202)} = 0, \quad C = L''_{x_2 x_2} \Big|_{(99;101;202)} = 2,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 4.$$

Так как $\Delta = 4 > 0$ и $A = 2 > 0$, то точка $(99;101)$ есть точка искомого минимума. Найдём значение целевой функции:

$$R_{\min} = R(99;101) = (4x_1 + x_1^2 + x_2^2) \Big|_{(99;101)} = 20398.$$

Для графического метода решения целевую функцию запишем в виде:

$$R = 4x_1 + x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + 2)^2 + x_2^2 - 4.$$

Тогда линии уровня

$$R_0: (x_1 + 2)^2 + x_2^2 = 4 + \text{const}$$

представляют собой семейство концентрических окружностей с центром в точке $(-2; 0)$.

Минимальное значение целевой функции будет достигаться в точке C касания линии уровня с прямой $x_1 + x_2 = 200$.

Продифференцируем выражение линии уровня целевой функции как неявно заданную функцию от переменной x_1 :

$$\left((x_1 + 2)^2 + x_2^2 \right)'_{x_1} = 0;$$

$$2(x_1 + 2) + 2x_2 \cdot x_2' = 0;$$

$$x_2' = -\frac{x_1 + 2}{x_2}.$$

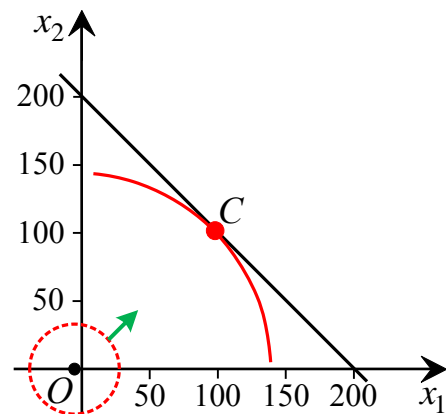


Рис. 3.6.

Приравняем полученное выражение к тангенсу угла наклона граничной прямой: $x_2 = 200 - x_1$, которой принадлежит искомая точка C :

$$-\frac{x_1 + 2}{x_2} = -1.$$

Найдем координаты точки C , решив систему:

$$\begin{cases} \frac{x_1 + 2}{x_2} = 1; \\ x_2 = 200 - x_1. \end{cases} \Rightarrow C(99, 101).$$

Ответ: $R_{\min} = R(99; 101) = 20398.$ ☺

3.4. Выпуклое программирование

Определение. Задачей выпуклого программирования (ВП) называется задача нелинейного программирования, в которой целевая функция является выпуклой (или вогнутой), а функции ограничения – выпуклы.

В п.1.3 показано, что отрезок $[X_1, X_2]$ может быть представлен выпуклой комбинацией своих угловых точек:

$$X = \lambda \cdot X_1 + (1 - \lambda) \cdot X_2, \text{ где } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Определение. Функция $F(X)$, определённая на выпуклом множестве X , называется выпуклой, если для любых двух точек X_1 и X_2 из множества X и любого числа $\lambda \in [0; 1]$ справедливо неравенство:

$$F(X) = F[\lambda \cdot X_1 + (1 - \lambda) \cdot X_2] \leq \lambda \cdot F(X_1) + (1 - \lambda) \cdot F(X_2).$$

С геометрической точки зрения из выполнения неравенства следует, что значение функции $F(X^*)$ в любой точке X^* отрезка $[X_1, X_2]$ области определения не превышает соответствующего значения ординаты $\tilde{F}(X^*)$ отрезка, соединяющего точки $(X_1; F(X_1))$ и $(X_2; F(X_2))$.

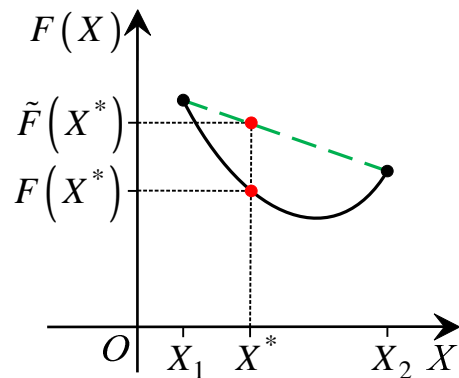


Рис. 3.7.

Определение. Функция $F(X)$, определённая на выпуклом множестве X наборов переменных, называется вогнутой, если для любых двух наборов X_1 и X_2 переменных из множества X и любого числа $\lambda \in [0; 1]$ справедливо:

$$F(X) = F(\lambda \cdot X_1 + (1 - \lambda) \cdot X_2) \geq \lambda \cdot F(X_1) + (1 - \lambda) \cdot F(X_2).$$

Всякий локальный максимум выпуклой функции (минимум вогнутой функции) является глобальным.

Если целевая функция является строго выпуклой (строго вогнутой), и область допустимых решений системы ограничений не пуста, то задача выпуклого программирования имеет единственное решение. В этом случае максимум выпуклой функции (минимум вогнутой) достигается внутри ОДР, если в ней имеется экстремальная точка, или на границе ОДР, если внутри неё нет точки экстремума.

3.5. Квадратичное программирование

Определение. Квадратичная форма $F(X) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj} x_k x_j$ называется

положительно (отрицательно) полуопределённой, если для любого набора переменных X справедливо неравенство $F(X) \geq 0$ ($F(X) \leq 0$) и, кроме того, существует такой набор X' , в котором не все значения переменных одновременно равны нулю, для которого $F(X') = 0$.

Теорема 3.1. Квадратичная форма является выпуклой функцией, если она является положительно полуопределённой, и вогнутой функцией, если она отрицательно полуопределена.

В общем виде математическая **модель задачи квадратичного программирования** имеет вид:

— найти набор переменных $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, удовлетворяющий ограничениям

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \end{cases}$$

при которых функция

$$F(X) = \sum_{j=1}^n d_j x_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj} x_k x_j$$

достигает своего оптимума.

Здесь $F(X)$ – отрицательно (положительно) полуопределённая квадратичная форма, a_{ij} , b_i , d_j , c_{kj} – заданные постоянные величины.

Глава 4. Динамическое программирование

В ряде экономических и производственных задач необходимо учитывать изменение моделируемого процесса во времени и влияние времени на критерий оптимальности. Для решения задач такого типа предназначен метод динамического программирования.

Определение. *Динамическое программирование* (ДП) – раздел оптимального программирования, в котором процесс принятия решения и управления может быть разбит на отдельные этапы-шаги.

Экономический процесс считается управляемым, если можно влиять на ход его развития. Под *управлением* понимается совокупность решений, принимаемых на каждом этапе, для влияния на ход развития процесса. Например, выпуск продукции предприятием – управляемый процесс. Совокупность решений, принимаемых в начале года (квартала и т. д.) по обеспечению предприятия сырьём, замене оборудования, финансированию и иным подобным вопросам, является управлением. Необходимо организовать выпуск продукции так, чтобы решения, принятые на отдельных этапах, способствовали получению максимально возможного объёма продукции или прибыли.

Динамическое программирование позволяет свести одну сложную задачу со многими переменными ко многим задачам с малым числом переменных. Это сокращает объём вычислений, ускоряет процесс принятия управленческого решения. В отличие от ЛП, в котором симплексный метод является универсальным методом решения, в ДП универсального метода не существует. Один из основных методов динамического программирования – метод рекуррентных соотношений. Он основывается на использовании принципа оптимальности, состоящего в том, что, каковы бы ни были начальное состояние на любом шаге и управление, выбранное на этом шаге, последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния, к которому придёт система в конце данного шага. Использование такого принципа гарантирует, что управление, выбранное на любом шаге, является не только локально лучшим, но и лучшим с точки зрения процесса в целом. В некоторых задачах, решаемых методом динамического программирования, процесс управления разбивается на шаги. При распределении на несколько лет ресурсов производственной деятельности предприятия шагом целесообразно считать временной период; при распределении средств между предприятиями – номер очередного предприятия. В других задачах разбиение на шаги вводится искусственно. Например, непрерывный управляемый процесс можно рассматривать как дискретный, условно разбив его на временные отрезки (шаги). Исходя из условий каждой конкретной задачи, длину шага выбирают таким образом, чтобы на каждом шаге получить более простую задачу оптимизации и обеспечить требуемую точность вычислений.

4.1. Основные понятия ДП

Пусть рассматривается задача, распадающаяся на m -шагов.

Шаги процесса для задач ДП нумеруются в обратном направлении по отношению к ходу процесса. Так, $n = 1$ относится к одной временной стадии, остающейся до завершения процесса, а $n = m$ – к началу процесса ($i = \overline{1, m}$).

Введём обозначения:

s – состояние процесса;

S_i – множество возможных состояний процесса перед i -ым шагом;

F – показатель (критерий) эффективности в целом – *выигрыш*;

x_i – переменная, от которой зависит выигрыш на i -ом шаге (и выигрыш в целом), называется *шаговым решением*;

$f_i(s; x_i)$ – выигрыш на i -ом шаге, который приведёт к решению x_i , если система перед этим находилась в состоянии s ;

$s' = g_i(s; x_i)$ – функция перехода на i -ом шаге из состояния s в состояние s' под влиянием решения x_i .

Если F обладает свойством аддитивности, т.е. $F = \sum_{i=1}^m f_i$, то

можно найти оптимальное решение задачи методом ДП.

Определение. Решением X задачи динамического программирования называется последовательность шаговых решений x_i :

$$X = (x_m; x_{m-1}; \dots; x_2; x_1).$$

Всевозможные наборы X образуют область допустимых решений задачи ДП.

Определение. Оптимальное решение $X_{\text{опт}}$ – это набор шаговых решений, при котором значение выигрыша F является максимальным (или минимальным, если требуется уменьшить проигрыш):

$$F_{\text{опт}} = F(X_{\text{опт}}) = \max\{F(X)\}.$$

4.2. Алгоритм составления математической модели задачи ДП

1. Разбить задачу на шаги.
2. Выбрать переменные, характеризующие состояние s моделируемого процесса, и выявить налагаемые на них ограничения.
3. Определить область допустимых решений.
4. Определить функцию выигрыша $f_i(s; x_i)$.
5. Определить функцию состояния $s' = g_i(s; x_i)$.

6. Составить уравнение, определяющее условный оптимальный выигрыш на последнем шаге до конца процесса:

$$F_1(s) = \max_{x_i} \{f_i(s; x_i)\}. \quad (4.1)$$

7. Составить основное функциональное уравнение ДП для s -состояния процесса, определяющее условный оптимальный выигрыш с i -го шага до конца процесса:

$$F_i(s) = \max_{x_i} \{f_i(s; x_i) + F_{i-1}(g_i(s; x_i))\}. \quad (4.2)$$

Уравнения (4.1) и (4.2) являются рекуррентными соотношениями, которые позволяют определить величину оптимума F_i в зависимости от оптимума F_{i-1} .

4.3. Алгоритм решения задачи ДП

- Шаг 1.** Определить множество возможных состояний S_1 для последнего шага.
- Шаг 2.** Провести условную оптимизацию для каждого состояния $s \in S_1$ последнего шага по формуле (4.1) и определить условное оптимальное решение $x_i(s)$, $s \in S_1$.
- Шаг 3.** Определить множество возможных состояний S_i для i -го шага, $i = \overline{2, m-1}$.
- Шаг 4.** Провести условную оптимизацию для каждого состояния $s \in S_i$ i -го шага, $i = \overline{2, m-1}$ по формуле (4.2) и определить условное оптимальное решение $x_i(s)$, $s \in S_i$.
- Шаг 5.** Определить начальное состояние системы s_1 оптимального выигрыша $F_1(s_1)$ и оптимальное решение $x_1(s_1)$ по формуле (4.2). Это и есть оптимальный выигрыш для всей задачи $F^* = F_1(x_1^*)$.
- Шаг 6.** Провести безусловную оптимизацию решения. Для этого найденное на первом шаге оптимальное решение $x_1^* = x_1(s_1)$ необходимо подставить в формулу функции перехода и определить следующее состояние $s_2 = g_2(s_1; x_1^*)$. Для изменённого состояния найти оптимальное решение $x_2^* = x_2(s_2)$ и определить следующее состояние $s_3 = g_3(s_2; x_2^*)$ и т.д. Для i -го состояния s_i найти $s_{i+1} = g_{i+1}(s_i; x_i^*)$ и $x_{i+1}^*(s_{i+1})$ и т.д.

4.4. Применение метода функциональных уравнений в определении оптимальных сроков замены оборудования

Одной из важных экономических проблем является определение оптимальной стратегии в замене старых станков (агрегатов, машин и т. д.) на новые. Старение оборудования означает его физический и моральный износ. В результате растут производственные затраты на выпуск продукции, увеличиваются затраты на ремонт и обслуживание оборудования, снижаются производительность и ликвидная стоимость. Наступает время, когда старое оборудование выгоднее продать и заменить новым, чем эксплуатировать ценой больших затрат.

Оптимальная стратегия замены оборудования состоит в определении оптимальных сроков замены. Критерием оптимальности могут служить прибыль от эксплуатации оборудования, которую следует максимизировать, или суммарные затраты на эксплуатацию в течение рассматриваемого промежутка времени, подлежащие минимизации.

Введём обозначения:

$r(t)$ – стоимость продукции, производимой за один год на единице оборудования возраста t лет;

$u(t)$ – ежегодные затраты на обслуживание оборудования возраста t лет;

$s(t)$ – остаточная стоимость оборудования возраста t лет.

P – стоимость нового оборудования.

Построим математическую модель.

1. Число шагов (стадий) равно числу лет, в течение которых эксплуатируется оборудование. Рассмотрим период N лет, в пределах которого требуется определить оптимальный цикл замены оборудования.
2. Состояние системы характеризуется возрастом оборудования t . Возраст оборудования отсчитывается в направлении течения процесса. Так, $t = 0$ соответствует случаю использования нового оборудования.

Временные же стадии процесса нумеруются в обратном направлении по отношению к ходу процесса. Так, $n = 1$ относится к одной временной стадии, остающейся до завершения процесса, а $n = N$ – к началу процесса (рис. 4.1).

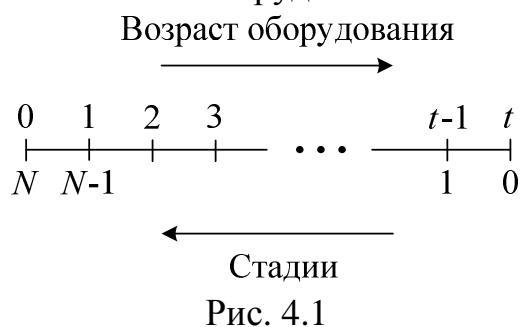


Рис. 4.1

3. На каждом этапе N -стадийного процесса должно быть принято решение о сохранении или замене оборудования:

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{если оборудование не заменяется;} \\ 1, & \text{если оборудование заменяется.} \end{cases}$$

Выбранный вариант должен обеспечивать получение максимальной прибыли.

4. Функция выигрыша на i -ом шаге – это прибыль от использования оборудования к концу i -го года эксплуатации:

$$F_i(t) = \begin{cases} r(t) - u(t), & \text{если оборудование не заменяется в начале } i\text{-го года;} \\ s(t) - P + r(0) - u(0), & \text{если оборудование заменяется.} \end{cases}$$

Функция $r(t) - u(t)$ представляет собой разность между стоимостью произведённой продукции и эксплуатационными издержками. Величина $r(0) - u(0)$ выражает прибыль, получаемую от нового оборудования возраста нуль лет. Предполагается, что переход от работы на оборудовании возраста t лет к работе на новом оборудовании совершается мгновенно.

Функция $s(t) - P$ представляет собой чистые издержки по замене оборудования, возраст которого t лет.

5. Функция изменения состояния:

$$g_i = \begin{cases} t + 1, & \text{если } x_i = 0; \\ 1, & \text{если } x_i = 1. \end{cases}$$

6. В итоге функциональные уравнения (4.1) и (4.2), основанные на принципе оптимальности, примут вид:

$$F_1(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) - \text{сохранение;} \\ s(t) - P + r(0) - u(0) - \text{замена.} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$F_N(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) + F_{N-1}(t+1) - \text{сохранение;} \\ s(t) - P + r(0) - u(0) - F_{N-1}(1) - \text{замена;} \end{cases} \quad (4.2)$$

где $F_N(t)$ – максимальная прибыль, получаемая от оборудования возраста t лет за оставшиеся N лет цикла использования оборудования при условии оптимальной стратегии.

Оба уравнения состоят из двух частей: верхняя строка определяет прибыль, получаемую при сохранении оборудования; нижняя – прибыль, получаемую при замене оборудования и продолжения процесса работы на новом оборудовании.

Функция $F_{N-1}(t+1)$ в (4.2) характеризует суммарную прибыль от $(N-1)$ оставшихся стадий для оборудования, возраст которого в начале осуществления этих стадий составляет $(t+1)$ лет.

Функция $F_{N-1}(1)$ в (4.2) представляет собой доход от оставшихся $(N-1)$ стадий до начала осуществления которых возраст оборудования укладываются в одну и ту же стадию.

В уравнении (4.1) нет слагаемого вида $F_0(t+1)$, т. к. номер стадии принимает значения $1, 2, \dots, N$.

Равенство $F_0(t) = 0$ следует из определения функции $F_N(t)$.

Структура этих уравнений показывает, что при переходе от одной стадии процесса к следующей возраст оборудования увеличивается с t до $(t+1)$ лет, а число оставшихся стадий уменьшается с N до $(N-1)$.

Расчёт начинают с использования уравнения (4.1). Уравнения (4.1) и (4.2) позволяют оценить варианты замены и сохранения оборудования с тем, чтобы выбрать тот из них, который предполагает большую прибыль. Эти соотношения дают возможность не только определить линию поведения при решении вопроса о сохранении или замене оборудования, но и рассчитать прибыль, получаемую при принятии каждого из этих решений.

Пример 4.1. Определить оптимальную стратегию эксплуатации оборудования на 5 лет при следующих исходных данных: $P = 10$, $s(t) = 0$. Значения функции $s(t) = 0$ заданы в табл. 4.1.

Таблица 4.1

N		5	4	3	2	1
t	0	1	2	3	4	5
$F(t)$	10	9	8	7	6	5

☺ Решение. Уравнения (4.1) и (4.2) запишем в виде:

$$\begin{aligned} F_N(t) &= \max \{f(t) + f_{N-1}(t+1); -P + f(0) + f_{N-1}(1)\}; \\ F_1(t) &= \max \{f(t); -P + f(0)\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для стадии с номером $n = 1$:

$$F_1(0) = \max \{F(0); -P + f(0)\} = \max \{10; -10 + 10\} = 10 \text{ (сохранение);}$$

$$F_1(1) = \max \{F(1); -P + F(0)\} = \max \{9; -10 + 10\} = 9 \text{ (сохранение);}$$

Аналогично найдём: $F_1(2) = 8$ – сохранение, $F_1(3) = 7$ – сохранение, $F_1(4) = 6$ – сохранение, $F_1(5) = 5$ – сохранение.

Для $n = 2$:

$$\begin{aligned} F_2(0) &= \max \{F(0) + F_1(1); -P + F(0) + F_1(1)\} = \\ &= \max \{10 + 9; -10 + 10 + 9\} = 19 \text{ (сохранение);} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(1) &= \max \{F(1) + f_1(2); -P + F(0) + F_1(1)\} = \\ &= \max \{9 + 8; -10 + 10 + 9\} = 17 \text{ (сохранение).} \end{aligned}$$

Аналогично найдём: $F_2(2) = 15$ – сохранение, $F_2(3) = 13$ – сохранение, $F_2(4) = 11$ – сохранение, $F_2(5) = 9$ – сохранение.

Для $n = 3$:

$$\begin{aligned} F_3(0) &= \max \{F(0) + F_2(1); -P + F(0) + F_2(1)\} = \\ &= \max \{10 + 17; -10 + 10 + 17\} = 27 \text{ (сохранение);} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3(1) &= \max \{F(1) + F_2(2); -P + F(0) + F_2(1)\} = \\ &= \max \{9 + 15; -10 + 10 + 17\} = 24 \text{ (сохранение).} \end{aligned}$$

Аналогично найдём: $F_3(2) = 21$ – сохранение, $F_3(3) = 18$ – сохранение, $F_3(4) = 15$ – замена, $F_3(5) = 17$ – замена.

Для $n = 4$:

$$F_4(0) = \max\{F(0) + F_3(1); -P + F(0) + F_3(1)\} = \\ = \max\{10 + 24; -10 + 10 + 24\} = 24 \text{ (сохранение);}$$

$$F_4(1) = \max\{F(1) + F_3(2); -P + F(0) + F_3(1)\} = \\ = \max\{9 + 21; -10 + 10 + 24\} = 30 \text{ (сохранение).}$$

Аналогично найдём: $F_4(2) = 26$ – сохранение, $F_4(3) = 24$ – сохранение, $F_4(4) = 23$ – замена, $F_4(5) = 24$ – замена.

Для $n = 5$:

$$F_5(0) = \max\{F(0) + F_4(1); -P + F(0) + F_4(1)\} = \\ = \max\{10 + 30; -10 + 10 + 30\} = 40 \text{ (сохранение);}$$

$$F_5(1) = \max\{F(1) + F_4(2); -P + F(0) + F_4(1)\} = \\ = \max\{9 + 26; -10 + 10 + 30\} = 35 \text{ (сохранение).}$$

Аналогично найдём: $F_5(2) = 32$ – сохранение, $F_5(3) = 31$ – сохранение, $F_5(4) = 30$ – замена, $F_5(5) = 30$ – замена.

Вычисления продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено условие $F_{n-1}(1) > F_n(t-1)$, т. е. в данный момент оборудование необходимо заменить, т. к. величина прибыли, получаемая в результате замены оборудования, больше, чем в случае использования старого. Результаты расчётов помещаем в табл.4.2, момент замены отмечаем звёздочкой (*), после чего дальнейшие вычисления по строке прекращаем.

Таблица 4.2.

$F_N(t)$	0	1	2	3	4	5
	N	5	4	3	2	1
$F_1(t)$	10	9	8	7	6	5
$F_2(t)$	19	17	15	13	11	9
$F_3(t)$	27	24	21	18	17*	
$F_4(t)$	34	30	26	23	24*	
$F_5(t)$	40	35	32	31	30*	

Можно не решать каждый раз уравнения (4.3), а вычисления проводить в таблице. Например, вычислим $F_3(t)$:

$$F_3(0) = F_1(0) + F_2(1) = 10 + 17 = 27 > F_2(1) = 17;$$

$$F_3(1) = F_1(1) + F_2(2) = 9 + 15 = 24 > F_2(1);$$

$$F_3(2) = F_1(2) + F_2(3) = 8 + 13 = 21 > F_2(1);$$

$$F_3(3) = F_1(3) + F_2(4) = 7 + 11 = 18 > F_2(1);$$

$$F_3(4) = F_1(4) + F_2(5) = 6 + 9 = 15 < F_2(1).$$

Дальнейшие расчёты для $F_3(t)$ прекращаем.

Таким образом, для получения максимальной прибыли от использования оборудования оптимальный срок замены составляет 4 года. ☺

4.5. Оптимальное распределение ресурсов (инвестиций)

Пусть имеется некоторое количество ресурсов (инвестиций) x , которое необходимо распределить между n различными предприятиями (объектами, работами и т. д.) так, чтобы получить максимальную суммарную эффективность от выбранного способа распределения.

Введём обозначения:

x_i – количество ресурсов (инвестиций), инвестируемых i -му предприя-

тию. $\sum_{i=1}^n x_i = x$, $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$.

$g_i(x_i)$ – функция полезности – это величина дохода от использования ресурсов (инвестиций) x_i , полученных i -ым предприятием;

$F_k(x)$ – наибольший доход, который можно получить от первых k различных предприятий при использовании ресурсов x .

Построим математическую модель.

1. Число шагов (стадий) равно числу предприятий, в которые распределяются ресурсы.
2. Состояние системы на каждом шаге характеризуется количеством средств s , имеющихся в наличии перед данным шагом.
3. Решением на i -ом шаге x_i является количество ресурсов, инвестируемых в i -ое предприятие.
4. Функция выигрыша на i -ом шаге $f_i(x_i)$ – прибыль, которую принесёт i -ое предприятие при инвестировании в него x_i количество ресурсов.

$$F = \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

5. Функция перехода в новое состояние: $g_i(s, x_i) = s - x_i$.

Т.е., если в наличие имеются ресурсы в размере s единиц, и в i -ое предприятие инвестируется x_i единиц, то для дальнейшего инвестирования остаётся $(s - x_i)$ единиц.

6. Наибольший доход, который получается при использовании ресурсов $x - x_i$ от первых $(i - 1)$ предприятий, составит $F_{i-1}(x - x_i)$ – условный оптимальный выигрыш.

Для максимизации суммарного дохода от i -го и первых $(i-1)$ предприятий необходимо выбрать x_i так, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} F_1(x) &= g_1(x); \\ F_1(s) &= f_1(s), \quad x_1(s) = s \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} F_i(x) &= \max\{g_i(x_i) + f_{i-1}(x - x_i)\}, \quad k = \overline{2, n}. \\ F_i(s) &= \max_{x \leq s} \{f_i(x_i) + F_{i-1}(s - x_i)\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Уравнение (4.4) в данном случае определяет, что перед инвестированием средств в последнее предприятие, условное оптимальное решение соответствует количеству средств, имеющихся в наличии; т. е. сколько средств осталось, столько и надо вложить в последнее предприятие. Условный оптимальный выигрыш равен доходу, приносимому последним предприятием.

Поясним уравнение (4.5). Пусть перед i -ым шагом у инвесторов осталось s единиц средств. Тогда x_i средств он может вложить в i -е предприятие, при этом оно принесёт доход $f_i(x_i)$, а оставшиеся $(s - x_i)$ единиц средств – в остальные предприятия. Условный оптимальный выигрыш от такого вложения $F_{i-1}(s - x_i)$. Оптимальным будет то условное решение, при котором сумма $f_i(x_i)$ и $F_{i-1}(s - x_i)$ максимальна.

Рассмотрим конкретную задачу по распределению капиталовложений между предприятиями.

Пример 4.2. Совет директоров рассматривает предложения по наращиванию производственных мощностей организации для увеличения выпуска однородной продукции на четырёх предприятиях, принадлежащих организации.

Для расширения предприятий совет директоров выделяет средства в объёме 120 млн. руб. с дискретностью 20 млн. руб. Прирост выпуска продукции на предприятиях зависит от выделенной суммы, его значения представлены предприятиями и содержатся в табл. 4.3.

Таблица 4.3.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции, млн. руб.			
	предприятие 1	предприятие 2	предприятие 3	предприятие 4
20	8	10	12	11
40	16	20	21	23
60	25	28	27	30
80	36	40	38	37
100	44	48	50	51
120	62	62	63	63

Найти распределение средств между предприятиями, обеспечивающее максимальный прирост выпуска продукции, причём в одно предприятие можно осуществить инвестиции только единожды.

☺ Решение. Разобьём решение задачи на четыре этапа по количеству предприятий, в которые предполагается осуществить инвестиции.

Рекуррентные соотношения будут иметь вид:

для предприятия 1: $f_1(x) = g_1(x)$;

для всех остальных предприятий:

$$f_k(x) = \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = \overline{2, n}.$$

Решение будем проводить согласно рекуррентным соотношениям.

Этап 1. Инвестиции производим только в первое предприятие:

$$\begin{aligned} f_1(20) &= 8, & f_1(40) &= 16, & f_1(60) &= 25, \\ f_1(80) &= 36, & f_1(100) &= 44, & f_1(120) &= 62. \end{aligned}$$

Этап 2. Капиталовложения выделяем первому и второму предприятиям. Рекуррентное соотношение для этапа 2 имеет вид:

$$f_2(x) = \max\{g_2(x_2) + f_1(x - x_2)\}.$$

С помощью этого соотношения находим:

$$\text{при } x = 20: \quad f_2(20) = \max\{8 + 0, 0 + 10\} = \max\{8, 10\} = 10;$$

$$\text{при } x = 40: \quad f_2(40) = \max\{16, 8 + 10, 20\} = \max\{16, 18, 20\} = 20;$$

$$\text{при } x = 60: \quad f_2(60) = \max\{25, 16 + 10, 8 + 20, 28\} = \max\{25, 26, 28, 28\} = 28;$$

$$\begin{aligned} \text{при } x = 80: \quad f_2(80) &= \max\{36, 25 + 10, 16 + 20, 8 + 28, 40\} = \\ &= \max\{36, 35, 36, 36, 40\} = 40; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{при } x = 100: f_2(100) &= \max\{44, 36 + 10, 25 + 20, 16 + 28, 8 + 40, 48\} = \\ &= \max\{44, 46, 45, 48, 48\} = 48;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{при } x = 120: f_2(120) &= \max\{62, 44 + 10, 36 + 20, 25 + 28, 16 + 40, 8 + 48, 62\} = \\ &= \max\{62, 54, 56, 53, 56, 56, 62\} = 62.\end{aligned}$$

Этап 3. Финансируем этап 2 и третье предприятие. По формуле

$$f_3(x) = \max\{g_3(x_3) + f_3(x - x_3)\}$$

находим:

$$\text{при } x = 20: f_3(20) = \max\{10, 12\} = 12;$$

$$\text{при } x = 40: f_3(40) = \max\{20, 10 + 12, 21\} = \max\{20, 22, 21\} = 22;$$

$$\begin{aligned}\text{при } x = 60: f_3(60) &= \max\{28, 20 + 12, 10 + 21, 27\} = \\ &= \max\{28, 32, 31, 27\} = 32;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{при } x = 80: f_3(80) &= \max\{40, 28 + 12, 20 + 21, 10 + 27, 38\} = \\ &= \max\{40, 40, 41, 37, 38\} = 41;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{при } x = 100: f_3(100) &= \max\{48, 40 + 12, 28 + 21, 20 + 27, 10 + 38, 50\} = \\ &= \max\{48, 52, 49, 47, 48, 50\} = 52;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{при } x = 120: f_3(120) &= \max\{62, 48 + 12, 40 + 21, 28 + 27, 20 + 38, 10 + 50, 63\} = \\ &= \max\{62, 60, 61, 55, 58, 60, 63\} = 63.\end{aligned}$$

Этап 4. Инвестиции в объёме 120 млн. руб. распределяем между этапом 3 и четвёртым предприятием

$$\begin{aligned}\text{при } x = 120: f_4(120) &= \max\{63, 52 + 11, 41 + 23, 32 + 30, 22 + 37, 12 + 51, 63\} = \\ &= \max\{63, 63, 64, 62, 59, 63, 63\} = 64.\end{aligned}$$

Получены управления от 1-го до 4-го этапа. Вернёмся назад от 4-го к 1-му этапу и проанализируем полученные варианты роста. Максимальный прирост выпуска продукции 64 млн. руб. получен на этапе 4 как сумма 41+23, т. е. 23 млн. руб. соответствует выделению 40 млн. руб. четвёртому предприятию (см. табл.). Согласно третьему этапу 41 млн. руб. получен как сумма 20+21, т. е. 21 млн. руб. соответствует выделению 40 млн. руб. третьему предприятию. Согласно второму этапу 20 млн. руб. получено при выделении 40 млн. руб. второму предприятию.

Итак, капиталовложения в объёме 120 млн. руб. целесообразно распределить второму, третьему и четвёртому предприятиям по 40 млн. руб. каждому. При этом прирост продукции будет максимальным и составит 64 млн. руб. 😊

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математика в экономике. Математические методы и модели: учебник / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 544 с.: ил.
2. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-издание,: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.: ил. – Парал. Тит. англ.
3. Красс М. С., Чупрынов Б. П. Основы математики и её приложения в экономическом образовании: учебник. – 6-е изд., испр. – М.: Издательство “Дело” АНХ, 2008. – 720 с.
4. Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учеб.-справоч. пособие / под. ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М.: Высшее образование, 2009. – 646 с. – (Основы наук).
5. Шикин Е. В, Чхартишвили А. Г. Математические методы и модели в управлении: Учеб. пособие. – 2-е изд., Испрв, – М.: Дело, 2002, – 440 с. – (Сер. «Наука управления»)
6. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч I: Учеб. пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк. 1997. – 304 с.: ил.
7. Партыка Т. Л., Попов И. И. Математические методы. – Учебник. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2005. – 464 с. (Профессиональное образование).
8. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 575 с. (Серия «Высшее образование»).

Учебное издание

Джамиля Калимулловна **Агишева**
Светлана Александровна **Зотова**
Виктория Борисовна **Светличная**
Татьяна Александровна **Матвеева**

**Методы принятия
оптимальных решений**

Учебное пособие

Редактор Е.М. Марносова

Темплан 2011 г. Поз. № 9 В

Подписано в печать 28.09.2011 г. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.

Гарнитура Times. Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,06. Уч.-изд. л. 9,36.

Тираж 100 экз. Заказ 9,06.

Волгоградский государственный технический университет
400131, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, корп. 1.

Отпечатано в ИУНЛ ВолгГТУ
Волгоградского государственного технического университета.
400131, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, корп. 7.